

DIE LOGIK
IM DEUTSCHEN KONSTRUKTIVISMUS
Die Rolle formaler Systeme
im Wissenschaftsaufbau
der Erlanger und Konstanzer Schule

Gregor Mayer

1981



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549025_0079

DIE LOGIK
IM DEUTSCHEN KONSTRUKTIVISMUS

Die Rolle formaler Systeme
im Wissenschaftsaufbau
der Erlanger und Konstanzer Schule

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrads
der Fakultät für
Philosophie, Wissenschaftstheorie und Statistik
der Ludwigs-Maximilians-Universität zu München

vorgelegt von
Gregor Mayer
aus München

München 1981



Referent: Univ.Doiz. Dr. P. Hinst

Korreferent: Prof. Dr.Dr. W. Stegmüller

Tag der mündlichen Prüfung: 27. Juli 1981

Inhaltsangabe

Einleitung	1
TEIL I: EINE DARSTELLUNG DER MATERIALEN UND FORMALEN LOGIK	4
(I1) Formale Präliminarien	4
(I2) Die materialen Dialoge	8
(I3) Strategien und halbformale Sequenzenkalküle	23
(I4) Materiale Wahrheit und semantische Wahrheit	61
(I5) Formale Wahrheit und formale Ableitbarkeit	76
TEIL II: MATERIALE UND FORMALE LOGIK IM WISSENSCHAFTSAUFBAU DES DEUTSCHEN KONSTRUKTIVISMUS	89
(II1) Das Beispiel der Protoarithmetik	89
(II2) Allgemeine Definitionen	103
ANHANG	118
Bibliographie	127

EINLEITUNG

Die sogenannte Erlanger Schule und die daraus entstandene Konstanzer Schule lassen sich als philosophische Bezugspunkte einer ganzen Reihe von vor allem deutschen Wissenschaftsphilosophen ausmachen. Diese von außen, vor allem vom Standpunkt der analytischen Tradition aus, als fest umrissenes Sonderphänomen erscheinende und meist pauschal als "Erlanger Schule" bezeichnete Bewegung hat sich in der Zwischenzeit soweit differenziert, daß von diesen Philosophen selbst dieser Ausdruck nur auf eine ganz bestimmte Gruppe um Prof. Lorenzen innerhalb dieser Strömung angewendet wird. Es scheint deshalb angebracht, einen neuen Terminus für diese Bewegung einzuführen; im Titel dieser Arbeit wird sie als "Deutscher Konstruktivismus" bezeichnet.

Dieses Etikett bezieht sich auf den gemeinsamen Anspruch dieser Gruppe, im Gegensatz etwa zur analytischen Tradition "konstruktiv" vorzugehen, wie auch immer dies im Einzelfall konkretisiert wird, und verwendet das Adjektiv "deutsch", um sie in möglichst wenig präjudizierender Weise von anderen konstruktiven Ansätzen (z.B. dem Konstruktivismus von Bishop) abzusetzen.

Der DK, wie wir ihn in Zukunft abkürzen werden, hat stets Schwierigkeiten gehabt, einen wirkungsvollen Dialog vor allem mit den Analytikern zustandezubringen. Ebenso war die Reaktion von außenstehenden Philosophen fast immer mit Desinteresse oder grundsätzlicher Ablehnung verbunden. Die letztere Haltung

ist wahrscheinlich auch darauf zurückzuführen, daß für einen modernen, an den formalen Standards der Logik und Mengenlehre orientierten Wissenschaftsphilosophen die meisten Veröffentlichungen des DK als sehr schwer verständlich erscheinen; hierbei ist der gravierendste Nachteil der Mangel an Explizitdefinitionen gerade in den zentralen Kategorien wie der des Konstruktiven oder dem Begriff der Begründung.

Wenigstens für einen Punkt soll diese Arbeit hier Hilfeleistung leisten, und zwar durch die Darstellung der Konstruktion der Logik und ihrer Grundlegung im DK an einem klaren Modell sowie durch einen Vorschlag zur Rekonstruktion der fundamentalen Rolle dieser Mechanismen im weiteren Aufbau der Wissenschaften.

Wir geben im ersten Teil die formalen Strukturen eines abstrakten Modells der sogenannten materialen und der formalen Logik an, beides in der Version von Lorenzen für Sprachen 1. Stufe^[1]. (Diese hat gegenüber den formal besser erforschten Dialogkalkülen von Lorenz den Vorzug größerer Einfachheit.) Anschließend beweisen wir die Äquivalenz zu einem üblichen klassischen und intuitionistischen Halb- und Vollformalismus sowie ein grundlegendes semantisches Ergebnis. Dieser Teil kann als relativ unproblematische Widerspiegelung und Fortführung der betreffenden Darstellungen zumindest der Erlanger Schule im DK gelten.

Der zweite Teil wagt sich an eine formale Rekonstruktion der Rolle der formalen und materialen Logik im begründenden Aufbau der Wissenschaften im DK. Diese Rekonstruktion entfernt

sich schon in ihrem methodischen Ansatz so weit von den mehr intuitiven und mit Beispielen arbeitenden Ausführungen des DK, wenn sie sich auch an ihrem Geist orientiert, daß sie als weitgehend ungesicherte, kreative Konjektur bzgl. der Intentionen des DK gelten muß. Es wäre natürlich wünschenswert, wenn wenigstens einige Vertreter des DK diesen oder einen ähnlichen Versuch als Explizitversion ihrer Vorstellungen akzeptieren oder eine ähnlich formale Darstellung dagegensetzen würden.

[1] Vgl. [Lorenzen/Schwemmer]

TEIL I: EINE DARSTELLUNG DER MATERIALIEN UND FORMALEN LOGIK

(I1) Formale Präliminarien

Diese Arbeit bleibt grundsätzlich auf der einen Sprachstufe der Metasprache; hierbei sind fettgeschriebene Zeichen ($\neg, \wedge, \mathbf{x}, \mathbf{e}, \dots$) Namen für die entsprechenden objektsprachlichen Ausdrücke.

Als metasprachliche Variablen für objektsprachliche Zeichen und Ausdrücke verwenden wir griechische Buchstaben, und zwar

$\nu, \mu, \nu_1, \dots$	für Individuenkonstanten
$\xi, \zeta, \xi_1, \dots$	für Individuenvariablen ^[1]
$\pi, \pi_1, \dots$	für Prädikatkonstanten
$\alpha, \beta, \alpha_1, \dots$	für (logisch atomare) Elementarsätze
$\phi, \psi, \Delta, \Gamma, \phi_1, \dots$	für wff und Aussagen
$\Sigma, \Theta, \Xi, \Omega, \Sigma_1, \dots$	für Aussagemengen

$\phi [\nu/\xi]$ bezeichne das Ergebnis der durchgehenden Ersetzung aller für ν freien ξ in ϕ durch ν . Ferner verwenden wir als Abkürzung für die 2-tupel (Σ, Θ) und (Σ, Φ) auch $\Sigma \Rightarrow \Theta$ bzw. $\Sigma : \Phi$. Der Ausdruck $\Sigma [\Phi]$ zeige an, daß Φ in Σ enthalten ist^[2].

$\mathbf{0}$ sei die leere Aussage.

Wir deuten n-tupel, also endliche Folgen mit n Gliedern $x_1, \dots, x_n$ durch runde Klammern $(x_1, \dots, x_n)$ an; da Folgen Funktionen sind, ist für das n-tupel t mit $m \leq n$ t^m das m-te Glied von t . Für die n-tupel t_1 und t_2 bezeichne $t_1 \circ t_2$ die Konkatenation von t_1 und t_2 . Das 0-tupel t_0 sei gleich der leeren Menge $\emptyset$.

Funktionen f sind rechtseindeutige Relationen mit dem Vorbereitungsbereich $vb(f)$ und dem Nachbereich $nb(f)$ ^[3]; n-stellige Relationen gelten durchgehend als Mengen von n-tupeln (natürlich müssen diese Begriffe letztlich auf dem des geordneten Paares

$\langle x, y \rangle$ aufbauen). Es sei ferner A, b gleich A_0, b_0 und $t; b$ gleich $t_0(b)$.

Ein Indexbaum I ist eine Menge von Zahlentupeln (d.h. n -Tupeln von Zahlen) mit $\emptyset \in I$, $t; n+1 \in I \Rightarrow t; n \in I$, $t; n \in I \Rightarrow t \in I$ [4].

Ein Baum B ist eine rechtseindeutige funktionale Relation mit einem Indexbaum als Vorbereitung. Ein Punkt X von B mit $X = (t, x) \in B$ ist der Vorgänger (vg) eines jeden Punkts $Y = (t; n, y)$ von B ; Y ist ein Nachfolger von X . Der Nf-Sequent von X ist die Folge von Punkten $((t; 1, y_1), (t; 2, y_2), \dots)$. Ein Punkt mit Nf von B ist ein Normalpunkt, ein Punkt ohne Nf Endpunkt von B .

Ein Quasipunkt x von B ist ein $x \in nb(B)$; statt von einem Punkt z mit $z'2 = x$ sprechen wir auch von $*x$ [5]. Ein Ast von B ist eine Folge a , die mit dem Ursprung $(\emptyset, x_0)$ von B beginnt und zu jedem Glied $a'n$, das Normalpunkt von B ist, als $a'n+1$ einen Nf von $a'n$ hat (wir werden nur Bäume mit endlichen Ästen, also ^{mit} einem Endpunkt als letztem Glied, behandeln).

Ein Weg von B ist ein Anfangsabschnitt, ein Wegstück von B ein beliebiger Abschnitt und ein Endstück von B ein Endabschnitt eines Astes a von B . Ein Quasiast c von B ist eine Folge $(x_1, x_2, \dots)$ von Quasipunkten von B mit einem Ast $(*x_1, *x_2, \dots)$ von B . Ferner sei $X \leq Y$ gdw $Y'1 = X'1 \circ t$ für $X, Y \in B$.

Ein Teilbaum von B ist ein $B' \subseteq B$, das für jeden Normalpunkt X von B in B' alle Nf Y von X in B enthält sowie ein $X_0 = (t_0, x_0)$ so daß alle $Y_1 \in B'$ gleich $(t_0 \circ s, y_1)$ sind. Dieses X_0 ist der Ursprung von B' , B' ist Teilbaum aus X_0 ; falls X_0 der einzige Nf in B eines $X \in B$ ist, ist B' Teilbaum ab X . Ein Baumrest B^* ab X_0 von B ist gleich $B' \setminus \{X_0\}$ für einen Teilbaum B' von B mit dem

Ursprung X_0 von B' . Ein Endteil von B ist ein Teilbaum oder ein Baumrest von B . Ein Anfang von B ist ein $B_0 \in B$, das den Ursprung von B und zu jedem $(t; n, x)$ alle $(t; m, y) \in B$ enthält (B_0 ist also selbst Baum). Das Ergebnis des Anhängens eines Teilbaums B' aus $X_0 = (t_0, x_0)$ an einen Endpunkt $Y = (s, y)$ von B ist der Baum $B \cup \{(s \circ (1) \circ t, x) : (t_0 \circ t, x) \in B'\}$; das des Anhängens eines Baumrests B' ab X_0 an Y ist der Baum $B \cup \{(s \circ t, x) : (t_0 \circ t, x) \in B'\}$. Ferner benötigen wir den Begriff des Ankoppelns eines Teilbaums B' an einen Endpunkt Y von B . Das Ergebnis ist ein Mischbaum C mit $C = B \cup B' \cup F$, $F = \{\langle Y, X_0 \rangle\}$ für B' aus X_0 . Das Gleiche gilt für das Ankoppeln eines Baumrests B' ab X_0 an Y , nur ist hier $F = \{\langle Y, X_1 \rangle, \langle Y, X_2 \rangle, \dots\}$ für alle N_f X_i von X_0 . Für einen Mischbaum C erweitern wir den Begriff des N_f so, daß für jedes $\langle Y, X \rangle \in F$ X N_f von Y sein soll. Wir nennen dann nur die $X \in B \cup B'$ Punkte von C (sie sind als 2-tupel von den geordneten Punktepaaren aus F eindeutig unterscheidbar). Die Begriffe des Astes von C etc. werden mit diesem erweiterten N_f -Begriff wie die für den Baum definiert.

[1] Da wir nur Sprachen 1. Stufe behandeln, benötigen wir Variablen nur für Individuen.

[2] Technisch wäre in einer voll formalisierten Metasprache diese Abkürzung so zu verstehen: Sei $\mathcal{Q}_1$ der All-, $\mathcal{Q}_2$ der Partikularquantifikator, $\mathcal{J}_1$ das Implikations- und $\mathcal{J}_2$ das Konjunktionszeichen. Sei ferner $\mathcal{A}$ eine Aussage, in der ' $\Sigma [\Phi]$ ' vorkommt, $\mathcal{Q}_i \varphi$ derjenige ' Σ ' oder ' Φ ' bindende Quantor, der am dichtesten vor $\Sigma [\Phi]$ steht und $\mathcal{L}$ der Bereich von $\mathcal{Q}_i \varphi$. Dann ist $\mathcal{A}$ eine Abkürzung für

$$\mathcal{A}[\mathcal{Q}_i \varphi (\phi \in \Sigma \mathcal{J}_i \mathcal{L}[\Sigma / \Sigma [\Phi]]) / \mathcal{Q}_i \varphi \mathcal{L}]$$

[3] Wir verwenden je nach Kontext 'f' als einen Funktor und schreiben z.B. ' $f(x=y)$ ' oder als Mengenvariable in ' $(x,y) \in f$ '. Die Klammerschreibweise für Funktoren (z.B. ' $nb(f)=M$ ') gebrauchen wir, wenn wir andeuten wollen, daß der entsprechende funktionale Zusammenhang nicht unbedingt als Menge repräsentierbar ist.

[4] Vgl. etwa: K. Schütte, Vollständige Systeme modaler und intuitionistischer Logik, Berlin 1968, S.22.

[5] Formal gesprochen heißt dies: Sei C_{j_i}, j_i wie oben, Anm.

[2] und $\neg[p, q]$ gleich

$\exists t (t \text{ ist Zahlentupel} \ \& \ p=(t, q))$ mit $p, q \neq 't'$, sei ferner $A[*q]$ eine Aussage mit dem q bindenden Quantor Q, q mit Bereich $\mathcal{L}$. Dann ist A eine Abkürzung für:

$$A [Q_{iq} q_i p (\neg[p, q]) \wedge \mathcal{L} [p/*q] / Q_{iq} \mathcal{L} [*q]]$$

wobei p frei sei für q in $\mathcal{L}$.

(I2) Die materialen Dialoge

Der Lösungsvorschlag des DK für das Problem der konstruktiven Begründung der formalen Logik als dem System der Ableitungszusammenhänge zwischen aus Elementarsätzen aufgebauten quantorenlogisch komplexen Aussagen besteht im Aufbau einer sogenannten materialen Logik.

Diese materiale Logik wurzelt in einer normierten Sprachpraxis, deren Elemente - die sogenannten materialen Dialoge - effektiv erlernbare und durchführbare Handlungen sind (wenn auch notwendigerweise etwas idealisiert und meist abstrakt dargestellt). In unserer Darstellung dieser materialen Dialogspiele werden wir auf einen handlungs- oder spieltheoretischen Rahmen verzichten, da zur Begründung der materialen Logik in einer Reihe von wichtigen Fällen in der betreffenden Sprachpraxis ohnehin die Existenz von nur theoretisch effektiv durchführbaren Sprachspielen stipuliert werden muß. Wir beschränken uns deshalb auf eine mengentheoretische Darstellung eines abstrakten Modells der für unsere Ziele wichtigen Strukturen.

Die außerlogische Basis dieser Sprachspiele bilden die Elementarverteidigungen, d.h. die in diesem Teil nicht weiter hinterfragten Verteidigungen der logisch atomaren Elementarsätze einer Sprache mithilfe praktisch durchführbarer Verfahren, die wir in der jeweiligen Sprachsituation als gegeben hinnehmen. Diese Verteidigungen können vorgebracht werden, um evtl. in einem Dialog vorkommende Elementaraussagen zu untermauern.

Dies ist also der Rahmen, der die möglichen materialen Dialoge festlegt und über ihren Ausgang - Gewinn oder nicht - entscheidet: Eine Sprache L , in der sich die Dialoge abspielen und eine Menge E der möglichen Elementarverteidigungen.

In unserer Darstellung einer Sprache L (1.Stufe) nehmen wir den Hintergrund einer allgemeinen Theorie der Junktoren, Quantoren, der Generierung logisch komplexer Sätze etc. als gegeben an und repräsentieren L lediglich durch die für unsere Zwecke wichtigen Komponenten. Diese sind (a) eine Folge $I = (v_1, v_2, \dots)$ von paarweise verschiedenen Individuenkonstanten von L und (b) eine Folge $F = (P_1, P_2, \dots)$, wobei P_m jeweils eine Folge der m -stelligen Prädikatkonstanten von L ist. L sei gleich (I, F) ; ind(L) gleich $nb(L^1)$. Eine Elementaraussage von L ist eine aus den Individuen- und Prädikatkonstanten von L gebildete Aussage α ; die Menge dieser α sei el(L). Eine Aussage von L sei eine durch el(L) generierte quantorenlogische Aussage beliebiger Komplexität.^[1]

Diese Sprache L wird in unseren Dialogen verwendet, die jedoch neben den Aussagen von L spezifische Symbole benötigen: $?, 1?, 2?$ und $v?$ für $v \in \text{ind}(L)$ (die Bezweiflungen von L) und $\alpha!$ für $\alpha \in \text{el}(L)$ (die Elementarverpflichtungen von L).^[2] Bezweiflungen, Elementarverpflichtungen und Aussagen von L sind Sätze von L .

Diese Sätze von L sind enthalten in den Komponenten möglicher Dialoge: den Dialogakten von L . Ein Dialogakt hat die Form $(1, \phi)$ für die Aussage ϕ von L (These von L) oder (m, p, i) für $m, i \geq 1$ und den Satz p von L (Angriff von L) oder

(m, ψ, i, j) für $m, i, j \geq 1$ und die Aussage ψ von L (Verteidigung von L). Für einen Dialogakt z sei $z'2 = p$ der Satz von z und z ein Akt mit p . $\circ p$ bezeichne einen Akt mit p ^[3]. Für ungerades $z'1$ sei z Proponentenakt, für gerades Opponentenakt von L ; $\|p$ ist ein Proponentenakt mit p , $p\|$ ein Opponentenakt mit p ^[1]. (Für eine intuitive Erklärung dieser Begriffe s.u. (Df1).)

Auf der Menge der Dialogakte ist eine 2-stellige und eine 3-stellige Relation definiert: z_2 ist Angriff auf z_1 und z_3 ist Verteidigung von z_1 gegen z_2 . Es gilt:

(1) z_2 ist Angriff auf z_1 gdw z_2 ist Angriff, z_1 Akt von L , $z_2'3 = z_1'1$, $z_1'2$ ist in der folgenden Tabelle in Spalte I stehende Aussage und $z_2'2$ der entsprechende Satz in Spalte II.

(2) z_3 ist Verteidigung von z_1 gegen z_2 gdw z_2 ist Angriff auf z_1 , z_3 ist Verteidigung von L , $z_3'4 = z_2'1$, $z_3'3 = z_1'1$ und $z_3'2$ ist Aussage in Spalte III, die $z_2'2$ in Spalte II entspricht.

(Beispiel: $(3, \psi, 1, 2)$ ist Verteidigung von $(1, \psi \wedge \Delta)$ gegen $(2, 1?, 1)$)

I (Aussage)	II (Angriff)	III (Verteidigung)
$\neg \psi$	ψ	—
$\psi \wedge \Delta$	1? oder 2?	ψ bzw. Δ
$\psi \vee \Delta$	?	ψ oder Δ
$\psi \rightarrow \Delta$	ψ	Δ

I	II	III
$\wedge \{ \phi$	$v_j ?$	$\phi[v_j / \{ \}$
$\vee \{ \phi$	$?$	$\phi[v_j / \{ \}$
α (für $\alpha \in el(L)$)	$?$	$\alpha!$

Aus diesen Dialogakten setzen sich die Dialoge in L zusammen. Wir werden uns mit drei Arten von Dialogen beschäftigen, die alle eine Verschärfung des folgenden Begriffs darstellen:

(Df 1) D ist allgemeiner Dialog in L um ϕ

gdw

(a) L ist Sprache

(b) D ist n-tupel von Dialogakten z von L mit $D'_{m'1}=m$

(c) D'_{11} ist die These von L mit ϕ

(d) jedes D'_m mit $1 < m \leq n$ ist

entweder

Angriff auf ein D'_i mit $i < m$

oder

Verteidigung eines D'_i gegen D'_j mit $j < m$

Nach unseren Definitionen beginnt also ein Dialog D immer mit einer Proponententhese $\| \phi$, wonach sich immer ein Opp.- und ein Prop.-Akt abwechseln (das zweite Glied $p\|$ von D muß übrigens immer ein Angriff auf $\| \phi$ sein). Ein Glied z von D ist ein Zug in D; für den Proponentenakt z ist z Proponentenzug, sonst Opponentenzug in D.

Zur anschaulichen Darstellung eines Dialogs führen wir folgende Konvention ein: Wir schreiben die Züge z_i untereinander; an den linken Rand kommt die Numerierung $i=z_i^{-1}$, an den rechten die Kennzeichnung der angegriffenen bzw. verteidigten Züge und in die Mitte neben einen Doppelpunkt der Satz p_i von z_i , und zwar für einen Prop.-Zug z_i auf die rechte und für einen Opp.-Zug auf die linke Seite. So geben wir z.B. $D_0 = ((1, \psi \Delta), (2, 1?, 1), (3, \psi, 1, 2))$ wieder mit

$$\begin{array}{rcl} 1 & & \psi \Delta \\ 2 & 1? & (1) \\ 3 & & \psi \quad (1, 2) \end{array}$$

Wie wir am Ende dieses Kapitels näher ausführen werden, stellt z.B. ein allgemeiner Dialog nach (Df1) die abstrakte Struktur (bestehend aus abstrakten Zahlen, Mengen, n-tupeln u.ä.) einer als in einer konkreten Praxis P realisierbar gedachten Handlung H dar, in der dann z.B. unsere Zahlen durch tatsächlich angeschriebene arabische Numerales und die Ordnung des n-tupels durch die zeitliche Abfolge von Teilhandlungen A_i ersetzt wären, wobei dann A_i (die konkrete Handlung eines Dialogpartners) das Äquivalent unserer Dialogakte wäre. In einer solchen Praxis P würden dann diese Züge A_i wirklich von zwei Teilnehmern, dem Proponenten und dem Opponenten durchgeführt werden, wobei der Proponent mit der These den Dialog eröffnet, indem er sie etwa an eine Tafel anschreibt, worauf der Opponent seinen Angriff darunterschreibt u.s.w.

Wir kommen nun zu

(Df 2) D ist klassischer Dialog in L um ϕ

gdw

(a) D ist allgemeiner Dialog in L um ϕ

(b) jeder Opponentenzug D^i_m in D ist

Angriff auf D^{i-1}_m

oder

Verteidigung eines Opponentenzugs gegen D^{i-1}_m

(c) jeder Proponentenzug ist

Angriff auf einen Opponentenzug

oder

Verteidigung eines Proponentenzugs D^i_i gegen D^{i+1}_i

Diese Dialoge bilden die Basis für die spätere Einführung der klassischen Logik.

(Df 3) D ist intuitionistischer Dialog in L um ϕ

gdw

(a) D ist klassischer Dialog in L um ϕ

(b) für keine Proponentenverteidigung D^i_m von D^i_i gegen

D^{i+1}_i gibt es einen Opponentenangriff D^j_j mit $i+1 < j < m$

Aus diesen Dialogen wird später die intuitionistische Logik entstehen. In den meisten Schriften des DK werden diese Dialoge und die darauf aufbauenden Begriffe als konstruktiv statt als intuitionistisch bezeichnet. Unsere Formulierung reserviert den Begriff des Konstruktiven für das generelle Programm des DK, um Verwirrungen vorzubeugen.

(Df 4) D ist streng-konstruktiver Dialog in L um ϕ

gdw

(a) D ist allgemeiner Dialog in L um ϕ

(b) jeder Zug D^m mit $m > 1$ in D ist

Angriff auf D^{m-1}

oder

Verteidigung von D^{m-2} gegen D^{m-1}

Diese Version der Dialoge ist als Grundlage für eine formale Logik praktisch untauglich (vgl. (L25)), wir werden aber eine enge Beziehung zum üblichen Begriff der semantischen Wahrheit feststellen.

Aus (Df2)-(Df4) ergibt sich sofort das folgende einfache Lemma:

(L 1) D ist streng-konstruktiver Dialog in L um ϕ

$\supset$

D ist intuitionistischer Dialog in L um ϕ

$\supset$

D ist klassischer Dialog in L um ϕ

Zur Abkürzung und um Definitionen von völlig analog auf den drei Dialogarten aufbauenden Begriffen zu vereinfachen, nennen wir die klassischen Dialoge auch 1-Dialoge, die intuitionistischen 2-Dialoge und die streng-konstruktiven 3-Dialoge. Diese Dialoge entsprechen der Version in [Lorenzen/Schwemmer].

Wir werden den Rahmen unserer Dialogdefinitionen - die Sprache L - so erweitern, daß es möglich wird, Dialoge D in L (d.h. Dialoge in L um ein ϕ) zu gewinnen. Dieser erweiterte Rahmen wird der einer Situation S sein, die, wie zu Beginn dieses Kapitels kurz skizziert, neben einer Sprache L sogenannte Elementarverteidigungen enthält, die für Elementaraussagen in D vorgebracht werden können.

Wir definieren eine solche Situation abstrakt mit

(Df 5) S ist Situation

gdw

S ist ein 2-tupel (L, R) und

(a) L ist Sprache

(b) R ist eine Menge von 2-tupeln (α, e) , wobei α Elementaraussage von L ist

Für ein $(\alpha, e) \in S^2$ nennen wir α elementar verteidigbar bzgl. S und das e Elementarverteidigung von α bzgl. S . Auf die Natur dieser Elementarverteidigungen gehen wir kurz am Schluß des Kapitels ein; wichtig für die nun in Teil I folgenden Beweise ist vor allem, daß R eine gewisse Teilmenge $vt(S)$ von $el(L)$ auszeichnet als die Menge der elementar verteidigbaren α . Eine Elementarverpflichtung α ! sei einlösbar bzgl. S gdw α in S elementar verteidigbar ist.

Offensichtlich läßt sich aus einer solchen Situation S sehr einfach eine atomare Bewertung für L herstellen, indem man genau die $\alpha \in vt(S)$ als wahr und alle anderen als falsch bewertet. Das 2-tupel (W, F) mit $W = vt(S)$ und $F = el(S^1) \setminus vt(S)$ bezeichnen wir als $bw(S)$.

Für eine Situation S nennen wir einen k^* -Dialog in S einen materialen k^* -Dialog bzgl. S (hier und im folgenden ist $k^* \in \{1, 2, 3\}$, für eine Erläuterung zum Begriff "material" s.u. S.21).

Eine Situation entscheidet in folgender Weise über den Gewinn eines Dialogs:

(Df 6) D ist bzgl. S gewonnen

gdw

(a) S ist Situation

(b) D ist materialer k^* -Dialog bzgl. S

(c) D enthält einen Zug ${}^\circ\alpha!$ und

${}^\circ\alpha!$ ist bzgl. S nicht einlösbarer Opp.-Zug

oder

${}^\circ\alpha!$ ist bzgl. S einlösbarer Prop.-Zug

Auch eine Situation S ist intendiert als abstraktes Modell einer konkret realisierbaren Praxis P_1 , in der das Gewinnen eines Dialogs eine Handlung H^* wäre. In P_1 wären die Elementarverteidigungen eines α bzgl. S dann ebenfalls konkrete Handlungen, die z.B. in folgender Weise den Gewinn von H^* determinieren würden (vgl. [Lorenzen/Schwemmer]): H^* sei zusammengesetzt aus den nacheinander durchzuführenden Handlungen H_0 und $v_1, \dots, v_n$, wobei H_0 ein konkreter Dialog in P_1 zwischen einem Proponenten und einem Opponenten ist (vgl. o., S.12), in dem genau die Elementarverpflichtungen ${}^\circ\alpha_1!, \dots, {}^\circ\alpha_n!$ in dieser Reihenfolge vorkommen. v_i stellt dann einen Verteidigungsversuch

von $\alpha_1!$ dar, der für $\alpha_1! = \|\alpha_1\|$ vom Proponenten, für $\alpha_1! = \alpha_1\|$ vom Opponenten vorzunehmen ist. Falls für ein v_m des Proponenten v_m Elementarverteidigung von α_m oder ein v_j des Opponenten v_j keine Elementarverteidigung von α_j ist, gilt H^* als gewonnen durch den Proponenten.

In diesem Zusammenhang ergeben sich mehrere Probleme. Das wichtigste ist - und dies wäre eine Form der Konkretisierung des Ausgangsproblems des DK (s. Teil III) - die Frage nach der Charakterisierung derjenigen Situationen, die tatsächlich Modelle für eine konkret realisierbare Praxis darstellen.

Wenn wir z.B. ein $S_2 = (L_2, R_2)$ definieren mit arithmetischen Aussagen als Elementaraussagen von L_2 und $R_2 = \{(\alpha, e) : \alpha \text{ ist logisch wahr und } e = 1\}$, so gibt es dazu aufgrund der unentscheidbaren Aussagen der Arithmetik keine konkret realisierbare Praxis P_2 , in der genau für jedes in S elementar verteidigbare α eine tatsächliche Elementarverteidigung zur Verfügung stünde. Die entsprechenden Einschränkungen des Situationsbegriffs werden wir unten in Teil III diskutieren; für die folgenden rein formalen Beweise stellen wir dieses Problem zurück.

Eine weitere Abstrahierung konkreter Dialogpraxen in (Df6) ist, daß der Gewinn eines Dialogs D sozusagen objektiv aus S heraus gegeben ist. So verzichten wir etwa auf Mechanismen, die die Relativierung der Elementarverteidigungen von in D vorkommenden $\alpha!$ auf das Wissen der Dialogpartner um solche Verteidigungen in einem konkreten Dialog parallel-

lisieren würden. Da wir dann darauf aufbauend ohnehin den Begriff der "objektiven Gewinnbarkeit von D" o.ä. wieder einführen müßten, würde ein derartiges Vorgehen den Aufbau der Definitionen nur unnötig komplizieren.

Wir stehen davon ab, komplementär zu (Df6) den Verlust eines Dialogs zu definieren. Es wäre zwar möglich, alle nichtgewonnenen Dialoge als verloren zu bezeichnen, aber dieser Begriff wird erstens kaum benötigt und erscheint zweitens z.B. bei den klassischen Dialogen etwas kontraintuitiv. Es ist dort offensichtlich so, daß der Proponent nie "aufgeben" muß, sondern etwa immer wieder denselben Angriff auf eine Opp.-Aussage durchführen kann ^[5].

Es gibt eine weitere Asymmetrie in der Rolle des Proponenten und des Opponenten in der intuitiven Auslegung der Dialog- und Gewinnbegriffe als eine Art Spielregel in einer konkret realisierbaren Praxis. Dies ist die Tatsache, daß der Begriff der Strategie im nächsten Kapitel und der darauf aufbauende der Gewinnstrategie nur dann als tatsächliche Spielstrategie erscheint, wenn der Opp. im Gegensatz zum Prop. einen Dialog nicht abbrechen darf, solange er noch eine Zugmöglichkeit hat.

Nachdem wir einen ersten Einblick in die spezifischen Grundlagen des Logikaufbaus im DK gewonnen haben, können wir einen Überblick über die weiteren Entwicklungen im Teil I geben und unsere Terminologie daran erläutern.

Im nächsten, ziemlich technischen, Kapitel (I3) werden wir den Begriff einer Strategie in L definieren, unter den bestimmte Bäume mit Dialogen in L als Quasiästen fallen und seine Beziehung zu einer erweiterten Version eines halbformalen Smullyan-Sequenzenkalküls zeigen (diese wichtigen Ergebnisse werden wir auf S.29⁴ zusammenfassend vorwegnehmen).

In (I4) werden wir den Begriff der materiellen Wahrheit einer Aussage bzgl. S einführen, der im DK dem der semantischen Wahrheit entspricht und seine Äquivalenz zu dem üblichen bewertungssemantischen Wahrheitsbegriff in $bw(S)$ beweisen. Die materiale Wahrheit beruht auf den materiellen Gewinnstrategien bzgl. S, die Strategien in S^1 mit gewonnenen Dialogen bzgl. S als Quasiästen sind (der Äquivalenzbeweis für die beiden Wahrheitsbegriffe beruht auf den in (I3) gewonnenen Sätzen).

In (I5) fügen wir zum Hintergrund unserer Sprache L die allgemeinrepräsentierenden Parameter hinzu und erhalten so den erweiterten Aussage- und Dialogbegriff der Aussage über L und des darauf aufbauenden formalen Dialogs über L. Dies führt zu den formalen Gewinnstrategien über L, die wieder eine Modifikation der Strategien in L darstellen und dem Äquivalenzbeweis zu den Smullyan-Sequenzenkalkülen ^{üblichen} aufgrund der Ergebnisse von (I3).

Ferner werden wir im Anhang durch eine einfache Einschränkung der Strategien in L die halbformalen Gewinnstrategien mit den Äquivalenzbeweisen zu üblichen Begriffen

erhalten und ein in (I4) und (I5) aufgetauchtes Problem der intuitionistischen materialen Wahrheit behandeln.

Angesichts der Ergebnisse dieses Anhangs läßt sich zu unserer Terminologie sagen: Würden wir die Dialoge und Strategien in L nur unter dem Blickwinkel ihrer Verwendbarkeit für einen deduktiven Kalkül sehen, so wäre es sinnvoll, sie durch den Zusatz "halbformal" auszuzeichnen, also statt von einer Strategie in L von einer halbformalen Strategie in L zu sprechen. Wenn wir dennoch unsere bisherigen Bezeichnungen beibehalten, so geschieht dies, weil uns dieser Aspekt zweitrangig erscheint gegenüber dem folgenden Zusammenhang:

Es ist das Spezifikum des Logikaufbaus im DK, daß die Dialoge und Strategien in L als Ausgangsbasis für zwei Entwicklungen dienen:

(a) durch die Erweiterung von L zu einer Situation S zusammen mit den Elementarverteidigungen als Träger einer (nicht modelltheoretischen) Semantik für die Erstellung eines abstrakten Modells einer den quantorenlogischen Aussagen Bedeutung verleihenden Sprachpraxis.

(b) durch die Erweiterung der Individuenzeichen von L und die Einführung neuer Dialoge über L (die in gewisser Weise Abstrahierungen von Dialogen in L darstellen) als Komponenten von formallogischen Ableitungen.

Um diese Struktur klarzumachen, bezeichnen wir:

(1) die Dialoge in L als Dialoge (ohne Zusatz), um ihren grundlegenden Charakter hervorzuheben,

(2) die mit den Dialogen in L identischen materialen Dialoge bzgl. jeder Situation ^{S mit $S \models L$} in Übereinstimmung mit der Terminologie des DK als material, um ihre semantische Rolle anzudeuten und

(3) die Komponenten der formalen Ableitungen als formale Dialoge über L.

[1] Hierbei kommen in keiner Aussage von L freie Variablen vor. Zur formalen Behandlung allquantifizierter Aussagen werden wir in (I5) allgemeinrepräsentierende Parameter einführen.

[2] Die Einführung dieser Elementarverpflichtungen weicht ab von vielen Darstellungen im DK (z.B. [Lorenzen/Schwemmer]); vgl. jedoch u., S. 87, [1].

[3] Sei $\exists[z, p]$ gleich
 $\exists n, t (n > 1, t \text{ ist Zahlentupel } z = (n, p) \text{ o. t})$
 für $z, p \neq 'n', 't'$ und $A[p]$ eine Aussage mit dem p bindenden Quantor $q_1 p$ mit Bereich $\mathcal{L}$. Dann ist A eine Abkürzung für
 $A[q_1 p q_2 z (\exists[z, p] j_i \mathcal{L} [z / p]) / q_1 \mathcal{L}]$
 wobei z frei sei für p in $\mathcal{L}$. (Vgl. S. 7, [5])

[4] $\|p$ bzw. $p\|$ wird eliminiert wie op (s.o. [2]), mit der Zusatzforderung 'n ist ungerade Zahl' bzw. 'n ist gerade Zahl' in $\exists$.

[5] Dies ist übrigens einer der Hauptunterschiede zu den Kalkülen von Lorenz, (s. [Lorenz]), in denen der Proponent u.U. mangels Zugmöglichkeiten aufgeben muß und dann den

Dialog sozusagen "wirklich" verloren hat. Der Vorteil solcher Systeme liegt in der Anwendbarkeit der Spieltheorie für 2-Personen-Mattspiele auf ihre Gewinnstrategien; für manche vielleicht auch in der aus philosophischen Gründen als überlegen angesehenen Chancengleichheit für die beiden Dialogpartner.

(I3) Strategien und halbformale Sequenzenkalküle

Wie angekündigt, entwickeln wir in diesem Kapitel mit der Definition der k^* -Strategie für eine Aussage ϕ sowie mit dem Beweis einer engen Beziehung zu einem halbformalen Smullyan-Sequenzenkalkül die Grundlagen für den Begriff der materialen und formalen Wahrheit von ϕ sowie ihrer Übereinstimmung mit der üblichen semantischen Wahrheit und der Ableitbarkeit von ϕ . Im Gegensatz zu den bisher eingeführten Begriffen können diese Strategien als z.T. unendliche Bäume nicht als Modelle einer Komponente einer konkret realisierbaren Praxis gelten.

Intuitiv gesehen, stellt eine solche halbformale k^* -Strategie T das Bild einer Möglichkeit des Proponenten dar, einen Dialog aus einer durch T bestimmten Menge M von k^* -Dialogen um ein $\dagger$ zu erzwingen. Dazu müssen natürlich alle verschiedenen Alternativen des Opponenten berücksichtigt werden, in einem Dialog um ϕ nach einem Prop.-Zug anzugreifen oder zu verteidigen. Am einfachsten geschieht dies, indem T als Baum dargestellt wird, wobei die Elemente des obigen M als Quasiäste und die verschiedenen Möglichkeiten des Opponenten als Verzweigungen nach den Prop.-Zügen erscheinen.

(Df 7) T ist k^* -Strategie in L für ϕ

gdw

(a) T ist Baum aus $(\emptyset, (1, \phi))$

(b) alle Quasiäste von T sind k^* -Dialoge in L um ϕ

(c) für jeden Punkt $X=(t, \|p)$ auf einem Ast a von T mit

$X=a'k$ (d.h. nach (b): $\|p=(k,p) \circ t$) gilt:

entweder

(ca) $p = \Psi \wedge \Delta$ und X hat genau die Nf $(t; 1, (k+1, 1?, k)),$
 $(t; 2, (k+1, 2?, k))$

oder

(cb) $p = \bigwedge_j \Psi$ und X hat genau die Nf $(t; j, (k+1, v_j?, k))$ für
 jedes $v_j = L'1'j$

oder

(cc) $\|p=(k, 2?, m)$, $a'm = \Psi \vee \Delta$ und X hat genau die Nf
 $(t; 1, (k+1, \Psi, m, k)), (t; 2, (k+1, \Delta, m, k))$

oder

(cd) $\|p=(k, 2?, m)$, $a'm = \bigvee_j \Psi$ und X hat genau die Nf
 $(t; j, (k+1, \Psi[v_j/\xi], m, k))$ für jedes $v_j = L'1'j$

oder

(ce) $\|p=(k, \Psi, m)$ und $a'm = \Psi \rightarrow \Delta$ und X hat genau die Nf
 $(t; 1, (k+1, \Delta, m, k))$ sowie

(cea) für $\Psi = \neg \Gamma$ $(t; 2, (k+1, \Gamma, k)),$

(ceb) für $\Psi = \Gamma_1 \wedge \Gamma_2$ $(t; i+1, (k+1, \Gamma_i, k))$

(cec) für $\Psi = \Gamma_1 \vee \Gamma_2, \bigvee_j \Gamma$ oder $\alpha \in e_1(L)$ $(t; 2, (k+1, ?, k))$

(ced) für $\Psi = \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ $(t; 2, (k+1, \Gamma_1, k))$

(cee) für $\Psi = \bigwedge_j \Gamma$ $(t; j+1, (k+1, v_j?, k))$ für jedes $v_j = L'1'j$

oder

(cf) $\|p = \|\alpha!$ und X ist Endpunkt von B

oder

(cg) X hat genau einen Nf

(d) jeder Punkt Y von B mit $Y = \ast q$ hat höchstens einen Nf

Zu dieser Definition ist anzumerken: (ca) und (cb) spiegeln die verschiedenen möglichen Opp.-Angriffe auf $\|p$ wieder, (cc) und (cd) die verschiedenen Opp.-Verteidigungen gegen den Angriff $\|p$ und (ce) die Wahl des Opp., entweder gegen $\|p$ zu verteidigen oder einen der möglichen Angriffe auf $\|p$ durchzuführen. (cf) und (cg) werden erzwungen durch (b): Auf einen Prop.-Zug $\|\alpha!$ kann der Opp. nicht reagieren und der Dialog bricht ab; für die unter (g) zusammengefaßten Fälle $p \in \{\neg, \vee, \Delta, \nabla, \rightarrow, \Delta, \nabla, \psi, \chi, \uparrow, \uparrow?, \uparrow?, \uparrow?\}$ und $\|p = \|\uparrow?$ Angriff auf $\alpha!$ hat der Opp. nur einen Zug offen.

Für $p \neq \alpha!$ schreibt (c) für jeden Prop.-Zug einen Nf vor; Endpunkte von T sind also nur Opp.-Züge $\ast q\|$ und Prop.-Verpflichtungen. Diese Regelung ergibt sich aus dem intuitiven Hintergrund des Strategiebegriffs: Würde eine Strategie des Prop. mit einem Prop.-Zug $\neq, \|\alpha!$ abbrechen, würde sie die Möglichkeit des Opp. nicht berücksichtigen, auf diesen Zug zu reagieren.

Wir konnten die obige Definition für alle drei Dialogarten gleichzeitig aufstellen, weil die in den Verzweigungen berücksichtigten möglichen Reaktionen des Opp. auf den unmittelbar vorhergehenden Prop.-Zug in den verschiedenen Versionen identisch sind. Sie unterscheiden sich lediglich in den verschiedenen Möglichkeiten des Prop. und aus diesen wählt die Strategie für jede Dialogstellung genau eine aus, so daß dabei Verzweigungen entfallen und die Bedingung (Df7b) genügt, um die betreffenden Strategien zu differenzieren.

Diese Strategien sind offensichtlich teilweise nicht finit, da sich etwa in Sprachen mit unendlich vielen Individuenkonstanten in einer Strategie für $\bigwedge\{\phi\}$ sofort eine unendliche Verzweigung ergibt.

Aus (L1) und (Df7) folgt trivialerweise:

(L 2) T ist streng-konstruktive Strategie in L für ϕ

$\supset$

T ist intuitionistische Strategie in L für ϕ

$\supset$

T ist klassische Strategie in L für ϕ

(Es handelt sich natürlich wieder um 3-, 2- und 1-Strategien)

Um nun in einem grundlegenden Theorem die Verwandtschaft des Strategiebegriffs zu üblicheren logischen Systemen herzustellen und die Voraussetzungen für spätere Äquivalenzbeweise zu schaffen, geben wir zwei halbformale Versionen eines "umgedrehten" Smullyan-Sequenzenkalküls an, die insofern Erweiterungen halbformaler Ableitungen darstellen, als in ihren Endpunkten beliebige endliche Aussagenmengen enthalten sein können.

(Df 8) B ist klassischer Q-Baum in L für ϕ ^[1]

gdw

(a) B ist Baum aus $(\emptyset, (\emptyset \rightarrow \{\phi\}))$ mit 2-tupeln $\Sigma \rightarrow \odot$ als Quasipunkten, wobei $\Sigma, \odot, \{\phi\}$ endliche Mengen von Aussagen der Sprache L sind

(b) alle Äste von B sind endlich

(c) jeder Punkt $(t, \Sigma \Rightarrow \odot)$ ist Endpunkt von B oder seine Nf sind nach eine der folgenden Regeln abgeleitet:

- | | |
|---|--|
| $(\neg \Rightarrow)$ $(t, \Sigma [\neg \Psi] \Rightarrow \odot)$
$(t; 1, \Sigma \Rightarrow \odot, \Psi)$ | $(\Rightarrow \neg)$ $(t, \Sigma \Rightarrow \odot [\neg \Psi])$
$(t; 1, \Sigma, \Psi \Rightarrow \odot)$ |
| $(\wedge \Rightarrow)$ $(t, \Sigma [\Psi_1 \wedge \Psi_2] \Rightarrow \odot)$
$(t; 1, \Sigma, \Psi_i \Rightarrow \odot)$ | $(\Rightarrow \wedge)$ $(t, \Sigma \Rightarrow \odot [\Psi_1 \wedge \Psi_2])$
$(t; i, \Sigma \Rightarrow \odot, \Psi_i)$ für $i \in \{1, 2\}$ |
| $(\vee \Rightarrow)$ $(t, \Sigma [\Psi_1 \vee \Psi_2] \Rightarrow \odot)$
$(t; i, \Sigma, \Psi_i \Rightarrow \odot)$ für $i \in \{1, 2\}$ | $(\Rightarrow \vee)$ $(t, \Sigma \Rightarrow \odot [\Psi_1 \vee \Psi_2])$
$(t; 1, \Sigma \Rightarrow \odot, \Psi_i)$ |
| $(\Rightarrow \Rightarrow)$ $(t, \Sigma [\Psi \Rightarrow \Delta] \Rightarrow \odot)$
$(t; 1, \Sigma, \Delta \Rightarrow \odot), (t; 2, \Sigma \Rightarrow \odot, \Psi)$ | $(\Rightarrow \Rightarrow)$ $(t, \Sigma \Rightarrow \odot [\Psi \Rightarrow \Delta])$
$(t; 1, \Sigma, \Psi \Rightarrow \odot, \Delta)$ |
| $(\Lambda \Rightarrow)$ $(t, \Sigma [\bigwedge \Psi_i] \Rightarrow \odot)$
$(t; 1, \Sigma, \Psi [\psi_i / \wedge] \Rightarrow \odot)$
für $\psi_i \in \text{ind}(L)$ | $(\Rightarrow \Lambda)$ $(t, \Sigma \Rightarrow \odot [\bigwedge \Psi_i])$
$(t; j, \Sigma \Rightarrow \odot, \Psi [\psi_j / \wedge])$
für jedes $\psi_j = L'1'j$ |
| $(\forall \Rightarrow)$ $(t, \Sigma [\forall \Psi] \Rightarrow \odot)$
$(t; j, \Sigma, \Psi [\psi_j / \forall] \Rightarrow \odot)$
für jedes $\psi_j = L'1'j$ | $(\Rightarrow \forall)$ $(t, \Sigma \Rightarrow \odot [\forall \Psi])$
$(t; 1, \Sigma \Rightarrow \odot, \Psi [\psi / \forall])$
für $\psi \in \text{ind}(L)$ |
| $(\text{rep}) \quad (t, \Sigma \Rightarrow \odot)$
$(t; 1, \Sigma \Rightarrow \odot)$ | |

Wir nennen den Nf-Sequenzen von X mit nach einer Regel $(\Rightarrow)$ gleich $(\Rightarrow), (\Rightarrow)$ oder (rep) abgeleiteten Nf nach $(\Rightarrow)$ inferiert. Das entsprechende gilt für den folgenden intuitionistischen Kalkül.

(Df 9) B ist intuitionistischer Q-Baum in L für ϕ_o ^[2]
gdw

- (a) B ist Baum aus $(\emptyset, (\emptyset: \phi_o))$ mit 2-tupeln $\Sigma: \phi$ als Quasipunkten, wobei $\{\phi\}, \{\phi_o\}, \Sigma$ endliche Aussagemengen von L sind

(b) alle Äste von B sind endlich

(c) jeder Punkt $(t, \Sigma : \phi)$ ist Endpunkt von B oder die Nf sind nach eine der folgenden Regeln abgeleitet:

($\neg$.)	$(t, \Sigma [\neg \psi] : \phi)$ $(t; 1, \Sigma : \psi)$	($\neg$)	$(t, \Sigma : \neg \psi)$ $(t; 1, \Sigma, \psi : 0)$
($\wedge$.)	$(t, \Sigma [\psi_1 \wedge \psi_2] : \phi)$ $(t; 1, \Sigma, \psi_i : \phi)$	($\wedge$)	$(t, \Sigma : \psi_1 \wedge \psi_2)$ $(t; i, \Sigma : \psi_i)$ für $i \in \{1, 2\}$
($\vee$.)	$(t, \Sigma [\psi_1 \vee \psi_2] : \phi)$ $(t; i, \Sigma, \psi_i : \phi)$ für $i \in \{1, 2\}$	($\vee$)	$(t, \Sigma : \psi_1 \vee \psi_2)$ $(t; 1, \Sigma : \psi_i)$
($\rightarrow$.)	$(t, \Sigma [\psi \rightarrow \Delta] : \phi)$ $(t; 1, \Sigma, \Delta : \phi), (t; 2, \Sigma : \psi)$	($\rightarrow$)	$(t, \Sigma : \psi \rightarrow \Delta)$ $(t; 1, \Sigma, \psi : \Delta)$
($\bigwedge$.)	$(t, \Sigma [\bigwedge \{ \psi \} : \phi)$ $(t; 1, \Sigma, \psi[v_j/\zeta] : \phi)$ für $v \in \text{ind}(L)$	($\bigwedge$)	$(t, \Sigma : \bigwedge \{ \psi \})$ $(t; j, \Sigma : \psi[v_j/\zeta])$ für jedes $v_j = L'1'j$
($\bigvee$.)	$(t, \Sigma [\bigvee \{ \psi \} : \phi)$ $(t; j, \Sigma, \psi[v_j/\zeta] : \phi)$ für jedes $v_j = L'1'j$	($\bigvee$)	$(t, \Sigma : \bigvee \{ \psi \})$ $(t; 1, \Sigma : \psi[v/\zeta])$ für $v \in \text{ind}(L)$

Wir werden wieder klassische Q-Bäume als 1-Q-Bäume, und intuitionistische als 2-Q-Bäume bezeichnen. Für ihre Punkte $\Sigma \Rightarrow \odot$ bzw. $\Sigma : \phi$ nennen wir Σ das Praecurrens und $\odot$ bzw. $\vdash$ das Postveniens (die Begriffe Antecedens und Consequens reservieren wir für die Teilaussagen einer Implikation).

Der Begriff des streng-konstruktiven Q-Baums wird nicht definiert. Da es keine brauchbare streng-konstruktive Logik gibt (vgl. (L25)), fehlen die entsprechenden Formalismen auch in der Literatur. Sie wären zwar einfach herzustellen, indem man u.a. (wie beim Übergang von den 1- zu den 2-Q-Bäumen das

Postveniens $\odot$ in ein $\ominus$ umgewandelt wird) im 2-Q-Baum das Praecurrens Σ durch ein Ψ ersetzt und die Regeln entsprechend verändert, jedoch sind die einzig wichtigen (semantischen) Ergebnisse bzgl. der 3-Strategien auch einfacher zu erreichen.

Bevor wir uns nun den folgenden grundlegenden Theoremen zuwenden, müssen wir noch eine grundsätzliche Bemerkung machen: Wir verwenden für den Beweis dieser Sätze unbedenklich klassische Mittel (wenn wir uns dabei auch immer im Bereich des Abzählbaren bewegen). Es gibt indes Strömungen im DK, die den Primat des Intuitionismus stark betonen

und derartige Beweismittel u.U. als prinzipiell mangelhaft ablehnen würden. Jedoch nimmt z.B. Lorenzen gegenüber der klassischen Logik einen relativ liberalen Standpunkt ein^[3]. Wir können also annehmen, daß unsere Ausführungen zumindest für einige Vertreter des DK akzeptabel wären.

Wir wollen nun zunächst für den klassischen Fall die folgenden grundlegenden Sätze beweisen. Hierzu definieren wir zweckmäßigerweise die neuen Begriffe:

Sei B auf die 1-Strategie T reduzierbar₁ gdw (a) B ist Baum (b) für jeden Endpunkt $\star \Sigma \Rightarrow \Theta$ von B gibt es einen Quasiast D von T, so daß (ba) für alle angegriffenen $\|\Phi$ in D ist $\Phi \in \Theta$ (bb) für alle Ψ in D ist $\Psi \in \Sigma$.

Sei T auf den 1-Q-Baum B reduzierbar₂ gdw (a) T ist 1-Strategie (b) für jeden Quasiast D von T gibt es einen Endpunkt $\star \Sigma \Rightarrow \Theta$ von B, so daß (ba) für alle $\Psi \in \Sigma$ ist Ψ Zug in D (bb) für alle $\Phi \in \Theta$ ist $\|\Phi$ angegriffener Zug in D

Um das Ziel der folgenden Beweise zu verdeutlichen, nehmen wir die abschließenden Ergebnisse vorweg:

(Th1) Für jede 1-Strategie T gibt es einen 1-Q-Baum B, der auf T reduzierbar₁ ist.

(Th2) Für jeden 1-Q-Baum B gibt es eine 1-Strategie T, die auf B reduzierbar₂ ist.

(Für den Beweis dieser wie auch der entsprechenden intuitionistischen Sätze nehmen wir stillschweigend den Rahmen einer Sprache L als gegeben an.)

Wir gehen nun an den Beweis von (Th1). Zunächst modifizieren wir (Df8), indem wir die Regel $(\Rightarrow \Rightarrow)$ aufspalten in:

$$\begin{array}{ll} (\Rightarrow \Rightarrow_1) & (t, \Sigma \Rightarrow \odot [\Psi \Rightarrow \Delta]) \\ & (t; 1, \Sigma, \Psi \Rightarrow \odot) \end{array} \quad \begin{array}{ll} (\Rightarrow \Rightarrow_2) & (t, \Sigma \Rightarrow \odot [\Psi \Rightarrow \Delta]) \\ & (t; 1, \Sigma \Rightarrow \odot \Delta) \end{array}$$

und die so entstehenden Bäume als 1-Q*-Bäume bezeichnen. Offensichtlich gilt:

(L 3) Wenn es für die 1-Strategie T einen 1-Q*-Baum B gibt, der auf T reduzierbar₁ ist, dann gibt es auch einen solchen 1-Q-Baum B₀.

(Beweis) Wenn wir in B in allen Zweigen alle Ableitungen nach $(\Rightarrow \Rightarrow_1)$ ersetzen durch solche nach $(\Rightarrow \Rightarrow_2)$, so erhalten wir einen 1-Q-Baum B₀, für dessen Endpunkte $\star \Sigma_0 \Rightarrow \odot_0$ sowie für die entsprechenden Endpunkte $\star \Sigma \Rightarrow \odot$ von B gilt:
 $\Sigma \subseteq \Sigma_0$, $\odot \supseteq \odot_0$ und der Satz folgt sofort.

Sei nun ein Mikrobaum K der k*-Strategie T Teilbaum eines Anfangs von T, bestehend aus einem Prop.-Zug $\star \parallel p$ mit nachfolgendem Nf-Sequenten $(\star q_1 \parallel, \dots, \star q_1 \parallel, \dots)$ oder aus einem Prop.-Zug $\parallel \alpha!$, so können wir sofort sehen, daß T erschöpfend und disjunkt in Mikrobäume zerfällt ($\parallel \alpha!$ muß ja Schlußpunkt

(Df10) Wir definieren eine Funktion $tq_{(T,x)}(K)$, die jedem Mikrobaum K aus T bzgl. des Quasipunkts $x = \Sigma \Rightarrow \odot$ einen (T,x) -Teil-Q-Baum E zuordnet, wobei E Anfang eines Baumes ist (hierbei ergibt sich die Schreibweise von K zwanglos aus der für die Dialogabschnitte seiner Quasiäste). Es gelte:

(aa) für K gleich



ist $tq_{(T,x)}(K)$ gleich

$$(\emptyset, \Sigma \Rightarrow \odot, \nabla \psi) \quad (\Rightarrow \nabla)$$

$$((1), \Sigma, \psi \Rightarrow \odot, \nabla \psi)$$

(ab)



$$(\emptyset, \Sigma \Rightarrow \odot, \psi_1 \wedge \psi_2) \quad (\Rightarrow \wedge)$$

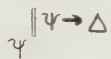
$$((i \in \{1, 2\}), \Sigma \Rightarrow \odot, \psi_1 \wedge \psi_2, \psi_i)$$

(ac)



$$(\emptyset, \Sigma \Rightarrow \odot, \psi_1 \vee \psi_2)$$

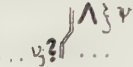
(ad)



$$(\emptyset, \Sigma \Rightarrow \odot, \psi \rightarrow \Delta) \quad (\Rightarrow \rightarrow)$$

$$((1), \Sigma, \psi \Rightarrow \odot, \psi \rightarrow \Delta)$$

(ae)



$$(\emptyset, \Sigma \Rightarrow \odot, \bigwedge \psi) \quad (\Rightarrow \wedge)$$

$$((j), \Sigma \Rightarrow \odot, \bigwedge \psi, \psi[v_j/\psi])$$

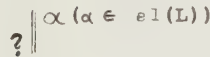
für alle $v_j = L'1^j$

(af)



$$(\emptyset, \Sigma \Rightarrow \odot, \vee \psi)$$

(ag)



$$(\emptyset, \Sigma \Rightarrow \odot, \alpha)$$

(ah)



$$\emptyset$$

In all diesen Fällen gilt offensichtlich für den Ursprung $\|\phi$ von K : entweder (a) $\star\|\phi$ Ursprung von T oder (b) $\|\phi$ Verteidigung eines $\|\Gamma$ oder (c) $\|\phi$ Angriff auf $\nabla\phi$.

(ba) für K gleich

ist $\text{tg}_{(T,x)}(K)$ gleich

$$\Psi_1 \parallel i?$$

$$(\emptyset, \Sigma, \Psi_1 \wedge \Psi_2 \Rightarrow \odot) \quad (\wedge \Rightarrow)$$

$$((1), \Sigma, \Psi_1 \wedge \Psi_2 \Rightarrow \odot)$$

für $\parallel i?$ Angriff auf $\Psi_1 \wedge \Psi_2 \parallel$ mit $\star \parallel i? \geq \star \Psi_1 \wedge \Psi_2 \parallel \in T$

(bb)

$$\Psi_1 \parallel \Psi_2?$$

$$(\emptyset, \Sigma, \Psi_1 \vee \Psi_2 \Rightarrow \odot) \quad (\vee \Rightarrow)$$

$$((i \in \{1, 2\}), \Sigma, \Psi_1 \vee \Psi_2, \Psi_i \Rightarrow \odot)$$

für $\parallel \Psi?$ Angriff auf $\Psi_1 \vee \Psi_2 \parallel$ mit $\star \parallel \Psi? \geq \star \Psi_1 \vee \Psi_2 \parallel \in T$

(bc)

$$\Delta \parallel \Psi$$

$$(\emptyset, \Sigma, \Psi \rightarrow \Delta \Rightarrow \odot) \quad (\rightarrow \Rightarrow)$$

$$((1), \Sigma, \Psi \rightarrow \Delta \Rightarrow \odot)$$

$$\vdots \\ E' \\ \vdots$$

für $\parallel \Psi$ Angriff auf $\Psi \rightarrow \Delta \parallel$

mit $\star \parallel \Psi \geq \star \Psi \rightarrow \Delta \parallel \in T$

Hierbei gewinnt man E' aus $E_0 = \text{tg}_{(T,x_0)}(K_0)$ (E_0 gemäß (aa)–(ag)) mit $x_0 = \Sigma, \Psi \rightarrow \Delta \Rightarrow \odot$, $K_0 = q_1 \parallel \Psi$, indem man in E_0 alle (t, y) durch $((2) \circ t, y)$ ersetzt. Der Ursprung $x' = ((2), \Sigma, \Psi \rightarrow \Delta \Rightarrow \odot, \Psi)$ von E' wird dann der nach $(\rightarrow \Rightarrow)$ ableitbare zweite Nf von $(\emptyset, \Sigma, \Psi \rightarrow \Delta \Rightarrow \odot)$; der Nf-Sequent von x' bleibt nach den entsprechenden $(\Rightarrow)$ -Regeln in-ferierbar

(bd)

$$\Psi[v_j/\beta] \parallel v_j?$$

$$(\emptyset, \Sigma, \Lambda \beta \Psi \Rightarrow \odot) \quad (\Lambda \Rightarrow)$$

$$((1), \Sigma, \Lambda \beta \Psi, \Psi[v_j/\beta] \Rightarrow \odot)$$

für $\parallel v_j?$ Angriff auf $\Lambda \beta \Psi \parallel$ mit $\star \parallel v_j? \geq \star \Lambda \beta \Psi \parallel \in T$

(be)

$$\dots \Psi[v_j/\beta] \parallel \dots$$

$$(\emptyset, \Sigma, V \beta \Psi \Rightarrow \odot) \quad (V \Rightarrow)$$

$$((j), \Sigma, V \beta \Psi, \Psi[v_j/\beta] \Rightarrow \odot)$$

für $\parallel \Psi?$ Angriff auf $V \beta \Psi \parallel$ mit $\star \parallel \Psi? \geq \star V \beta \Psi \parallel \in T$ und für alle $v_j = L' 1' j$

(bf)

$$\alpha! \parallel ?$$

$$\emptyset$$

Offensichtlich sind für ein $E = tq_{(T,x)}(K)$ etwaige Nf des Ursprungs von E nach den oben in (Df10) jeweils angegebenen Regeln ($\Rightarrow$) aus dem Ursprung ableitbar. Wir können also konstatieren:

(L 4) Wenn an die Endpunkte X eines 1-Q*-Baums B jeweils höchstens ein E aus einer Menge M von $tq_{(T,y)}(K)$ angehängt wird und der jeweilige Ursprung von E überall aus X nach (Df8) ableitbar ist, so ist der entstehende Baum B_1 1-Q*-Baum.

(Df11) Wir definieren nun induktiv eine Funktion qb_n , die die Dialogzüge einer 1-Strategie T allmählich überführt in die Punkte eines 1-Q*-Baums; hierbei sind die Werte von qb_n im allgemeinen Mischbäume.

$qb_1(T)$ wird aus T konstruiert, indem man den Mikrobaum K_0 aus dem Ursprung $\star \parallel \Phi_0$ durch $E_0 = tq_{(T, \emptyset \rightarrow \emptyset)}(K_0)$ ersetzt und den jeweiligen Endteil A_1 von T ab dem i-ten Nf $\star q_i \parallel$ von $\star \parallel \Phi_0$ an den i-ten Endpunkt von E_0 ankoppelt.

$qb_{n+1}(T)$ entsteht aus $qb_n(T)$, indem man in jedem Ast a von $qb_n(T)$ auf den letzten Punkt $X = \star \Sigma \Rightarrow \Theta$ mit seinem Nf $\star \parallel p$ und dem Mikrobaum K aus $\star \parallel p$ folgende Operationen anwendet (für $x = x'2$):

Für $E = tq_{(T,x)}(K) \neq \emptyset$ wird E an X angehängt und der Endteil A_1 von $qb_n(T)$ ab dem i-ten Endpunkt von K an den i-ten Endpunkt von E angekoppelt; für $E = \emptyset$

wird K gestrichen und der Endteil A von $qb_n(T)$ ab dem Endpunkt von K wird an X angekoppelt.

Offensichtlich ist nach (Df10), (Df11) der Nf eines solchen X in $qb_n(T)$ immer ein $\star \parallel p$.

Wir nennen den Anfang eines $qb_n(T)$, der nur aus Punkten $\star \Sigma \Rightarrow \Theta$ besteht, den fertigen Teil von $qb_n(T)$ und den Anfang von T, dessen Punkte in $qb_n(T)$ bereits eliminiert wurden, den qb_n -ersetzten Teil von T.

Nun beweisen wir:

- (L 5) Für jeden Ast a mit Endpunkt $X = \star \Sigma \Rightarrow \Theta$ des fertigen Teils F von $qb_n(T)$ gibt es einen Quasiast D des qb_n -ersetzten Teils N von T mit Endglied $q \parallel (\star q \parallel \in N)$, so daß gilt:
- (a) alle angegriffenen Prop.-Aussagen $\parallel \Phi$ aus D sind in Θ enthalten
 - (b) alle Opp.-Aussagen $\Phi \parallel$ aus D sind in Σ enthalten
 - (ca) für jeden Abschnitt $\langle \parallel \psi_i \wedge \psi_i, i? \parallel \rangle$ von D ist $\psi_i \in \Theta$
 - (cb) für jeden Abschnitt $\langle \parallel \wedge \psi, \psi_j? \parallel \rangle$ von D ist $\psi[\psi_j / ?] \in \Theta$
 - (d) der Endteil von $qb_n(T)$ ab X und der Endteil von T ab $\star q \parallel$ sind gleich

(Beweis) Durch Induktion nach n. (Zur Erläuterung des Beweisgedankens: Der obige Endpunkt $\star q \parallel$ von N ist für einen Normalpunkt X von $qb_n(T)$ aus dem Endteil T' ab X von $qb_n(T)$ rekonstruierbar als der Ursprung des Teilbaums $\{\star q \parallel\} \cup T'$ von T.)

I.B.: Für $n=1$ gilt der Satz unmittelbar aus (Df10) für jeden Ast a_0 von $tq_{(T, \emptyset \Rightarrow \emptyset)}(K_0)$ und für den Mikrobaum K_0 aus dem Ursprung $\|\phi_0$ von T mit dem jeweils a_0 entsprechenden D_0 je nach der Form von K_0 .

I.V.: Der Satz gelte für den fertigen Teil F von $qb_n(T)$ für alle a mit Endpunkt $X = \star \Sigma \Rightarrow \ominus$ mit dem entsprechenden D des ersetzten N mit Endglied $q\|$ für den Endpunkt $\star q\|$ von N und $x = x'2$.

I.S.: Alle Äste a^* des fertigen Teils F^* von $qb_{n+1}(T)$ entstehen aus einem a von F durch Anfügung eines Astes von $tq_{(T,x)}(K)$ für den Mikrobaum K von $qb_n(T)$ ab X oder sind identisch mit einem Ast a von F , wobei sich die I.V. trivialerweise überträgt.

Für K wie in (Df10) $(ab), (ac), (ae), (af), (ag)$ gilt (b) nach I.V., da keine neuen Opp.-Aussagen hinzukommen und (a), da für den Ursprung $\star \phi\|$ von K als einzige Prop.-Aussage ϕ zu $\ominus$ dazugefügt wird.

Für K wie in (Df10), $(ba), (bb), (bd), (be)$ gilt (a) n.I.V. und (b) für den i -ten Endpunkt $\star \Sigma, \psi \Rightarrow \ominus$ von $tq_{(T,x)}(K)$ und den i -ten Endpunkt $\star \psi\|$ von K

Für K wie in (Df10), $(aa), (ad)$ werden beide neuen Aussagen links bzw. rechts hinzugefügt.

Für K wie in (Df10), (bc) gilt (a), (b) für $\Delta\|$ und das nichtangegriffene $\|\psi$ im ersten Quasiast und für die übrigen Äste mit den jeweiligen Opp.-Angriffen je nach der Gestalt von $\|\psi$ analog den vorhergehenden Überlegungen.

Für K wie in (Df10), (ah), (bf) kommt keine neue Aussage hinzu und durch die Streichung von K gilt der Satz nach I.V..

Die Behauptungen (ca) und (cb) gelten nach (Df10) für die Fälle (ab) bzw. (ae) und, je nach der Form des Ursprungs $\star \parallel \Psi$ von K , für (bc).

(d) ergibt sich unmittelbar aus (Df10), (Df11), da immer genau ein Endpunkt von K durch den betreffenden Endpunkt von $tq_{(T,x)}(K)$ ersetzt wird.

(L 6) Der fertige Teil F eines $qb_n(T)$ ist 1-Q*-Baum

(Beweis) Durch Induktion nach n

I.B.: Für $qb_1(T)$ mit dem fertigen Teil F_0 aus $\emptyset \rightarrow \{\Phi_0\}$ gleich $tq_{(T, \emptyset \rightarrow \emptyset)}(K_0)$ für den Mikrobaum K_0 aus dem Ursprung $\star \parallel \Phi_0$ von T gilt der Satz nach (Df10) analog (L4).

I.V.: Der Satz gelte für $qb_n(T)$.

I.S.: Der fertige Teil F^* von $qb_{n+1}(T)$ entsteht aus dem fertigen Teil F von $qb_n(T)$ durch Umwandlung der Mikrobäume K ab jedem Endpunkt $X = \star \Sigma \Rightarrow \odot$ von F mit X Normalpunkt von $qb_n(T)$ in Teilbäume $E = tq_{(T, \Sigma \Rightarrow \odot)}(K)$ eines 1-Q*-Baumes. Nach (L4) muß zum Beweis des Satzes für $qb_{n+1}(T)$ nur gezeigt werden, daß für jedes solche X der Ursprung $X_0 = \star \Sigma_0 \Rightarrow \odot_0$ des betreffenden E aus X ableitbar ist.

Nach (L5) gibt es für X einen Quasiast D des qb_n -ersetzten Teils N von $qb_n(T)$ mit Endglied $q \parallel$ für den Endpunkt $\star q \parallel$ von N , der (L5) erfüllt, also nach (L5d)

denselben Teilbaum ab $\star q$ in T hat, wie X in $qb_n(T)$.

Der Mikrobaum K aus $\star p$ ab X ist also auch Mikrobaum ab $\star q$ in T und im Dialog D bestehen für $\|p$ die Möglichkeiten:

(AA) $\|p = \|\Psi$ ist Angriff auf eine Opp.-Aussage $\neg\Psi$ aus D .

Nach (L5b) ist dann $\Psi \in \Sigma$ und $X_O = \star \Sigma[\neg\Psi] \Rightarrow \Theta, \Psi$ ist nach $(\neg\Rightarrow)$ aus X ableitbar.

(AB) $\|p = \|\Psi_1$ ist Verteidigung von $\|\Psi_1 \wedge \Psi_2$ aus D gegen den Nf $!?$. Dann ist nach (L5ca) $\Psi_1 \in \Theta$ und $X_O = \star \Sigma \Rightarrow \Theta[\Psi_1]$ ist nach (rep) aus X ableitbar.

(AC) $\|p = \|\Psi_1$ ist Verteidigung von $\|\Psi_1 \vee \Psi_2$ aus D gegen den Nf $?$. Dann ist nach (L5a) $\Psi_1 \vee \Psi_2 \in \Theta$ und $X_O = \star \Sigma \Rightarrow \Theta[\Psi_1 \vee \Psi_2], \Psi_1$ ist nach $(\Rightarrow\vee)$ aus X ableitbar.

(AD) $\|p = \|\Delta$ ist Verteidigung von $\|\Psi \rightarrow \Delta$ aus D gegen den Nf Ψ . Dann ist nach (L5a) $\Psi \rightarrow \Delta \in \Theta$ und $X_O = \star \Sigma \Rightarrow \Theta[\Psi \rightarrow \Delta], \Delta$ ist nach $(\Rightarrow\rightarrow)$ aus X ableitbar.

(AE) $\|p = \|\Psi[v_j/\zeta]$ ist Verteidigung von $\|\Lambda\zeta\Psi$ aus D gegen den Nf $v_j?$. Dann ist Analog (AB) für (L5cb) $X_O = X$ nach (rep) ableitbar.

(AF) $\|p = \|\Psi[v_j/\zeta]$ ist Verteidigung von $\|\vee\zeta\Psi$ aus D gegen den Nf $?$. Dann ist analog (AC) $X_O = \star \Sigma \Rightarrow \Theta[\vee\zeta\Psi], \Psi[v_j/\zeta]$ nach $(\Rightarrow\vee)$ aus X ableitbar.

(AG) $\|p = \|\alpha!$ ist Verteidigung von $\|\alpha$ aus D . Entfällt, da $\|p$ gestrichen wird.

(BA) $\|p$ ist Angriff auf nichtelementares ϕ $\neq \neg\Psi$ aus D .
Dann ist nach (L5b) $\phi \in \Sigma$ und $X_O = \star \Sigma[\phi] \Rightarrow \Theta = X$ ist nach (rep) aus X ableitbar.

(BB) $\|p = \|\alpha\|$ ist Angriff auf elementares α aus D. Entfällt, da der Mikrobaum $\alpha!$ gestrichen wird.

Wir können dieses Ergebnis nicht sofort etwa in dem Sinne interpretieren, daß durch die Funktion $qb_n(T)$ zu jeder 1-Strategie T ein 1-Q*-Baum geliefert wird, den dann identisch ist mit dem fertigen Teil eines $qb_m(T)$. Da es sich um halbformale Entwicklungen handelt (vgl. S.20 u.), gibt es u.U. keinen längsten Ast in T und für kein $qb_n(T)$ wäre dann T vollständig in einen 1-Q*-Baum umgewandelt.

Wir sind deshalb zu einem etwas umständlicheren Weg gezwungen und beweisen zunächst die folgenden kleineren Lemmata. Dabei benötigen wir den Begriff des in $qb_n(T)$ vollendeten Astes als den eines Astes von $qb_n(T)$, der nur noch Punkte der Form $\star \Sigma \Rightarrow \odot$ enthält.

(L 7) Jeder in einem $qb_n(T)$ neu entstandene Punkt $X = (t, \Sigma \Rightarrow \odot)$ liegt in einem $qb_i(T)$ mit $n \leq i$ auf einem vollendeten Ast.

(Beweis) Falls X in $qb_n(T)$ Endpunkt eines vollendeten Astes ist, gilt der Satz trivialerweise; falls nicht, läßt sich zeigen:

Sei a_1 der "linkeste" Ast $(Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$ ab X von $qb_n(T)$, d.h. der Ast mit Endglied $Y_m = (t' \circ t_m, Y_m)$, wobei t_m ein m-tupel $(1, \dots, 1)$ darstellt und $t' = \star q^{\|} 1$ ist für den nach (L5) X entsprechenden Punkt $\star q^{\|}$ von T mit demselben Endteil A ab $\star q^{\|}$ in T und X in $qb_n(T)$ (der a_1 entsprechende Quasiast ist natürlich Dialogabschnitt). In $qb_{n+1}(T)$ besteht die Möglichkeit:

Entweder wird ein gekürztes A an X angehängt mit entsprechender Kürzung von a_1 , oder der neue Nf $X_1 = (t; 1, \sum_1 \Rightarrow \Theta_1)$ von X hat als linken Ast $(Y_3, \dots, Y_m)$ ab X_1 . Da a_1 endlich ist, liegt dann X nach höchstens m-maliger Iterierung des Vorgangs in $qb_{n+m}(T)$ auf einem vollendeten Ast.

(L 8) Für keinen Punkt $\ast \sum \Rightarrow \Theta$ in einem $qb_n(T)$ mit neu entstandenen Nf $\ast \sum_i \Rightarrow \Theta_i$ gibt es in einem $qb_i(T)$ mit $n < i$ einen neuen Nf

(Beweis) Neue Nf entstehen in einem $qb_k(T)$ nur durch Umwandlung von Dialogzügen. Da nach (Df10) in $qb_n(T)$ alle eventuellen Nf $\ast \parallel p$ von $\ast \sum \Rightarrow \Theta$ in die entsprechenden $\ast \sum_i \Rightarrow \Theta_i$ umgewandelt wurden, können in späteren Anwendungen von qb auch keine neuen Nf von $\ast \sum \Rightarrow \Theta$ entstehen.

(Df12) $qb(T)$ ist der Baum aus allen Ästen a, die für irgendein n in $qb_n(T)$ vollendet sind

Wir können uns diese etwas saloppe Definition gestatten wegen des folgenden Lemmas:

(L 9) $qb(T)$ ist 1-Q*-Baum

(Beweis) Nach (L6)-(L8) entsprechen sowohl der Ursprung von $qb(T)$ als auch alle Ableitungsschritte den modifizierten Regeln von (Df8); ferner ist bereits nach (Df12) ein unendlicher Ast in $qb(T)$ unmöglich.

(L10) $qb(T)$ ist auf T reduzierbar₁

(Beweis) Sei $X = \star \int \Rightarrow \odot$ Endpunkt von $qb(T)$ und damit nach Def.

Endpunkt eines vollendeten Astes a eines $qb_n(T)$. Nach Def. liegt a völlig im fertigen Teil von $qb_n(T)$ und es gibt für X ein D aus T mit den in (L5) beschriebenen Eigenschaften. Nach (L5d) ist der leere Teilbaum ab X in $qb_n(T)$ gleich dem ab dem Endpunkt $\star q\parallel$ aus D in T ; D ist also Quasiast von T mit den für die Reduzierbarkeit₁ hinreichenden Eigenschaften (L5a) und (L5d)

Wir können nun beweisen:

(Th1) Für jede 1-Strategie T gibt es einen auf T reduzierbaren₁ 1-Q-Baum

(Beweis) Unmittelbar aus (L3), (L9), (L10).

Wir kommen nun zum Beweis von (Th2). Die folgende Funktion ts_B analog $tq_{(T,x)}$ (die Teilstrategie bzgl. B) hat als Argumente Teilmengen des 1-Q-Baums B und zwar (a) Mengen $\{X\}$ mit einem Punkt X und (b) $\{\dots, Y_m, \dots\}$ mit den Gliedern eines N_f -Sequenzen $(\dots, Y_m, \dots)$ als Elementen. Wir nennen eine Menge der ersten Art einen Punktteil, der zweiten Art einen Minimalrest, beide Partikel von B . Werte von ts_B sind Mikrobäume K mit Ursprung $(\emptyset, \parallel p)$.

(Df13) Für den 1-Q-Baum B gilt: ^[4]

(a) Sei $r = \{X\}$ Punktteil von B mit $X = {}_*\Sigma \Rightarrow \ominus[\Phi]$ mit $\forall g$

${}_*\Sigma \Rightarrow \ominus[\Phi]$ oder $X = {}_*\emptyset \Rightarrow \{\Phi\}$ Ursprung von B. Es gelte nun

(aa) für Φ gleich

ist $ts_B(r)$ gleich

$\neg \psi$

$\psi \parallel \neg \psi$

(ab)

$\psi_1 \wedge \psi_2$

$1? \parallel \psi_1 \wedge \psi_2 \parallel 2?$

(ac) $\psi_1 \vee \psi_2, \vee \{ \psi$ oder

$\alpha (\alpha \in el(L))$

$? \parallel \Phi$

(ad) $\psi \rightarrow \Delta$.

$\psi \parallel \psi \rightarrow \Delta$

(ae) $\bigwedge \{ \psi$

$\dots \vee_j ? \parallel \bigwedge \{ \psi$

für alle $\vee_j = L'1'j$

(b) Sei $r = \{Y_K\}$ Minimalrest von B mit $s = (\dots Y_K \dots) Nf$ -Sequent in

B mit $\forall g {}_*\Sigma' \Rightarrow \ominus'$. Sei $(\Rightarrow)$ die Regel, nach der s inferiert wurde und Φ die Aussage in Σ' , auf die $(\Rightarrow)$ dabei angewendet wurde (d.h., diejenige Aussage, ohne die s nicht nach $(\Rightarrow)$ inferierbar wäre). Dann gilt:

(ba) für $(\Rightarrow) = (\wedge \Rightarrow), \Phi = \psi_1 \wedge \psi_2$ ist $ts_B(r)$ gleich

$s = ({}_*\Sigma', \psi_1 \Rightarrow \ominus')$

$\psi_1 \parallel 1?$

(bb) für $(\Rightarrow) = (\vee \Rightarrow), \Phi = \psi_1 \vee \psi_2$

$s = ({}_*\Sigma', \psi_1 \Rightarrow \ominus', {}_*\Sigma', \psi_2 \Rightarrow \ominus')$

$\psi_1 \parallel 2 \parallel \psi_2$

(bc) für $(\Rightarrow) = (\rightarrow \Rightarrow), \Phi = \psi \rightarrow \Delta$

$s = ({}_*\Sigma', \psi \Rightarrow \ominus', {}_*\Sigma' \Rightarrow \ominus', \Delta)$

$\Delta \parallel \psi \parallel \dots$

wobei $((i), \parallel q_1) = ((i-1), \parallel q_1)$ aus $ts_B(\{s'2\})$ gemäß (aa)-(ae)

(bd) für $(\Rightarrow) = (\wedge \Rightarrow)$, $\phi = \wedge \{ \psi$

$s = (*\Sigma', \psi[v_j/\xi] \Rightarrow \Theta')$

$\psi[v_j/\xi] \parallel v_j?$

(be) für $(\Rightarrow) = (V \Rightarrow)$, $\phi = V \{ \psi$

$s = (\dots, *\Sigma', \psi[v_j/\xi] \Rightarrow \Theta', \dots)$

$\parallel ?$
 $\dots \psi[v_j/\xi] \parallel \dots$

für alle $v_j = L'1'j$

Wir können nun aufgrund der Tatsache, daß die Nf und Verzweigungen in einem $ts_B(r)$ der klassischen Version von (Df7) entsprechen, analog (L4) den Satz aufstellen:

(L11) Wenn alle Endpunkte einer 1-Strategie T gleich $*q \parallel$ für einen Opp.-Zug $q \parallel$ sind, wenn an jedes dieser $*q \parallel$ höchstens ein Mikrobaum K aus einer Menge von $ts_B(r)$ angehängt wird und wenn jedes dieser K mit Ursprung $* \parallel p$ bzgl. dem Quasiast D von T mit Endglied $q \parallel$ die Bedingung erfüllt: entweder

(a) $\parallel p$ ist Angriff auf eine Opp.-Aussage $\Gamma \parallel$ in D und die Nf $*q_i \parallel$ von $* \parallel p$ sind die Verteidigungen von $\Gamma \parallel$ nach (Df7) ^[5]
oder

(b) $\parallel p$ ist Verteidigung einer in D angegriffenen Prop.-Aussage,
dann gilt: der neu entstandene Baum T^* ist 1-Strategie.

Nun können wir analog (Df11) die Punkte des 1-Q-Baums B schrittweise in die Dialogzüge einer auf B reduzierbaren 1-Strategie T überführen. Hierzu streichen wir zunächst aus B alle Ableitungsschritte nach (rep) und wenden dann die folgende Funktion an:

(Df14) $\text{strat}_1(B)$ wird aus B konstruiert, indem man den Ursprung $X_0 = \star \emptyset = \{\phi_0\}$ von B durch $\text{ts}_B(\{X_0\})$ ersetzt, wobei der Endteil B' ab X_0 an jeden Endpunkt von $\text{ts}_B(\{X_0\})$ angekoppelt wird.

$\text{strat}_{n+1}(B)$ entsteht aus $\text{strat}_n(B)$, indem in jedem Ast a auf den letzten Punkt $\star q \parallel$ mit Nf-Sequent $s = (\dots, \star \Sigma_i \Rightarrow \odot_i, \dots)$ und dem Vg $\star \Sigma \Rightarrow \odot$ von s in B bzgl. des Partikels r von B mit den Gliedern von s als Elementen folgende Operationen angewendet werden:

- (aa) falls $s = \{X\}$ in B nach $(\neg \Rightarrow), (\Rightarrow \vee), (\Rightarrow \rightarrow)$ oder $(\Rightarrow \vee)$ aus $\star \Sigma \Rightarrow \odot$ inferiert wurde, wird X durch $\text{ts}_B(r)$ ersetzt und der Endteil A ab X von $\text{strat}_n(B)$ an jeden Endpunkt von $\text{ts}_B(r)$ angekoppelt. (d.h. $\text{ts}_B(r)$ wird statt X angehängt).
- (ab) falls $s = (X_1, X_2)$ in B nach $(\Rightarrow \wedge)$ aus $\star \Sigma \Rightarrow \odot$ inferiert wurde mit $\psi_1 \wedge \psi_2 \in \odot$, $X_1 = \star \Sigma \Rightarrow \odot$, ψ_1 , wird für den letzten Angriff $\star j ? \parallel$ auf $\star \parallel \psi_1 \wedge \psi_2$ in $a X_j$ durch $\text{ts}_B(\{X_j\})$ ersetzt und das $X_{k \neq j}$ mit nachfolgendem Endteil gestrichen. Der Endteil A_j ab X_j in $\text{strat}_n(B)$ wird an jeden Endpunkt von $\text{ts}_B(\{X_j\})$ angekoppelt.
- (ac) falls $s = (\dots, X_m, \dots)$ nach $(\Rightarrow \wedge)$ inferiert wurde mit $\bigwedge \psi \in \odot$, $X_m = \star \Sigma \Rightarrow \odot$, $\psi[\vee_m / \cdot]$, wird für den letzten Angriff $\star \vee_j ? \parallel$ auf $\star \bigwedge \psi$ in $a X_j$ durch $\text{ts}_B(\{X_j\})$ ersetzt und alle anderen $X_{k \neq j}$ werden mit nachfolgendem Endteil gestrichen. An jeden Endpunkt von $\text{ts}_B(\{X_j\})$ wird der Endteil A_j ab X_j angekoppelt.

- (ba) falls $s=(X)$ abgeleitet wurde nach $(\Rightarrow \eta)$, wird X gestrichen und der Endteil A von $\text{strat}_n(B)$ ab X an $\star q \parallel$ angekoppelt.
- (bb) falls s nach $(\wedge \Rightarrow)$, $(\vee \Rightarrow)$, $(\wedge \Rightarrow)$, $(\vee \Rightarrow)$ inferiert wurde, wird s durch $ts_B(r)$ ersetzt und der Endteil A_i ab dem i -ten Glied X_i von s an den i -ten Endpunkt $\star q_i \parallel$ von $ts_B(r)$ angekoppelt. (Nach (Df13) ist die Anzahl der Glieder von s gleich der der Endpunkte von $ts_B(r)$, ferner hat, wie in allen anderen Fällen, $\star q \parallel$ in $\text{strat}_{n+1}(B)$ nur den Ursprung $\star p$ von $ts_B(r)$ als Nf.)
- (bc) falls $s=(X,Y)$ nach $(\Rightarrow \Rightarrow)$ inferiert wurde mit $\Psi \rightarrow \Delta \in \Sigma$, $X=\star \Sigma, \Delta \Rightarrow \Theta$, $Y=\star \Sigma \Rightarrow \Theta, \Psi$, wird s ersetzt durch $ts_B(r)$ mit dem neuen Nf $\star \Psi$ von $\star q \parallel$. An den ersten Endpunkt von $ts_B(r)$ wird der Endteil A ab X angekoppelt; der Endteil A^* ab Y wird an jeden weiteren Endpunkt $\star q_i \parallel$ von $ts_B(r)$ angekoppelt.

Wir definieren analog den Begriffen für (Th1) den des fertigen Teils von $\text{strat}_n(B)$, den des strat_n -ersetzten Teils von B sowie den des vollendeten Astes von $\text{strat}_n(B)$.

Ferner können wir ohne weiteres feststellen, daß nach (Df13), (Df14) alle Endpunkte des fertigen Teils F eines $\text{strat}_n(B)$ Opp.-Züge sind.

Es folgt das Äquivalent zu (L5):

(L12) Für jeden Ast d des fertigen Teils F eines $\text{strat}_n(B)$ mit Endpunkt $\star q\parallel$ und dem entsprechenden Quasiast D gibt es einen Ast a des strat_n -ersetzten Teils von B mit Endpunkt $X = \star \Sigma \Rightarrow \ominus$, für den gilt:

- (a) alle $\phi \in \Sigma$ sind Opp.-Aussagen in D
- (b) alle $\phi \in \ominus$ sind angegriffene Prop.-Aussagen in D
- (ca) für jedes $\neg \psi \in \ominus$ ist $\psi\parallel$ Opp.-Aussage in D
- (cb) für jedes $\psi \rightarrow \Delta \in \ominus$ ist $\psi\parallel$ Opp.-Aussage in D
- (d) der Endteil A von $\text{strat}_n(B)$ ab $\star q\parallel$ ist gleich dem Endteil von B ab X .

(Beweis) Durch Induktion nach n .

I.B.: Für $\text{strat}_n(B)$ gilt der Satz trivialerweise für $a_0 = (\star \emptyset \Rightarrow \{\phi_0\})$ und dem fertigen Teil $F_1 = \text{ts}_B(\{\star \emptyset \Rightarrow \{\phi_0\}\})$; mit dem einzigen Glied von a_0 als Endpunkt, der für jeden Quasiast D_1 von F_1 gleich $(\parallel \phi_0, q_1 \parallel)$ Behauptung (a)-(d) erfüllt nach (Df13), (Df14).

I.V.: Der Satz gelte für $\text{strat}_n(B)$ für alle d von F mit Endpunkt $\star q\parallel$ und dem jeweils entsprechenden a mit Endpunkt $X = \star \Sigma \Rightarrow \ominus$.

I.S.: Dann ergibt sich für jede Fortsetzung d^* von d im fertigen Teil F^* von $\text{strat}_{n+1}(B)$ und den entsprechenden Quasiast D^* :

d^* entsteht durch das Anhängen eines u.U. leeren Astes von $\text{ts}_B(r)$ an $\star q\parallel$ für $r = \{X\}$ für einen Nf X von $\star q\parallel$ oder $r = \{\dots, Y_m, \dots\}$ für den Nf-Sequenzen $(\dots, Y_m, \dots)$ von $\star q\parallel$, wobei folgende Möglichkeiten entstehen:

- (AA) X_0 wurde in B nach $(\neg \Rightarrow), (\Rightarrow \vee), (\Rightarrow \vee)$ aus X abgeleitet;
dann ist $X_0 = {}_*\Sigma \Rightarrow \ominus, \Phi, r = \{X_0\}$ und der betreffende Ast
von $ts_B(r)$ hat die Prop.-Aussage ${}_*\parallel \Phi$ als Ursprung mit
nachfolgendem Opp.-Angriff ${}_*\parallel q_i$, wobei für $\Phi = \neg \psi$ $q_i = \psi$
und für $\Phi = \psi \rightarrow \Delta$ $q_i = \psi$ (ca) und (cb) erfüllt.
- (AB) X_i wurde in B nach $(\Rightarrow \wedge)$ abgeleitet als Glied von (X_1, X_2) .
Dann gilt der Satz entweder analog (AA) oder erledigt
sich für gestrichenes X_i .
- (AC) X_0 wurde in B nach $(\Rightarrow \Rightarrow)$ aus X abgeleitet, also $X_0 =$
 $= {}_*\Sigma, \psi \Rightarrow \ominus, \Delta$ für $\psi \rightarrow \Delta \in \ominus$. Dann gilt $r = \{X_0\}$ und für Δ
(a) und (c) analog (aa) sowie (a) nach (I.V.cb) für ψ .
- (AD) X_i wurde in B nach $(\Rightarrow \wedge)$ aus X abgeleitet als Glied von
 $(\dots, X_m, \dots)$. Analog (AB).
- (BA) $X_0 = {}_*\Sigma, \psi \Rightarrow \ominus$ wurde in B nach $(\Rightarrow \neg)$ aus X abgeleitet und
 $\neg \psi \in \ominus$, $d^* = d$. Der Satz gilt nach (I.V.ca).
- (BB) für nach $(\wedge \Rightarrow), (\vee \Rightarrow), (\wedge \Rightarrow), (\vee \Rightarrow)$ inferiertes s mit $r = nb(s)$
taucht die gegen den Ursprung von $ts_B(r)$ verteidigende
Opp.-Aussage ${}_*\parallel \psi_i$ an genau dem i-ten Endpunkt^{von $ts_B(r)$} auf, der
dem i-ten Glied $X_i = {}_*\Sigma, \psi_i \Rightarrow \ominus$ von s entspricht, (a) und
(c) gelten nach I.V..
- (BC) für nach $(\Rightarrow \Rightarrow)$ inferiertes s gilt der Satz analog (BB)
für $r = nb(s)$ und den ersten Ast von $ts_B(r)$ mit dem nicht
angegriffenen Ursprung ${}_*\parallel \psi$ sowie analog (AA) für die
anderen Äste.

In all diesen Fällen gilt (d) trivialerweise ana-
log (L5d).

(L13) Der fertige Teil eines $\text{strat}_n(B)$ ist 1-Strategie

(Beweis) Durch Induktion nach n .

I.B.: Für $\text{strat}_1(B)$ gilt, der Satz trivialerweise für den fertigen Teil F gleich dem Mikrobaum $\text{ts}_B(\{\ast\emptyset \Rightarrow \{\phi_0\}\})$.

I.V.: Der Satz gelte für den fertigen Teil F von $\text{strat}_n(B)$.

I.S.: Der fertige Teil F^* von $\text{strat}_{n+1}(B)$ entsteht aus F durch Anhängen eines $\text{ts}_B(r)$ an den Endpunkt $\ast q$ jedes in $\text{strat}_n(B)$ nicht vollendeten d. Analog (L6I.S.) sind die Elemente von r auch Nf in B des nach (L12) $\ast q$ entsprechenden Endpunkts $X = \ast \Sigma \Rightarrow \Theta$ des strat_n -ersetzten Teils N von B .

Nach (L11) müssen wir nur beweisen, daß der jeweilige Quasiursprung $\parallel p$ von $\text{ts}_B(r)$ Angriff auf eine Opp.-Aussage Γ aus dem d entsprechenden Quasiast D ist mit $\parallel p$ folgenden Verteidigungen q_1 von Γ oder aber Verteidigung einer angegriffenen Prop.-Aussage aus D ist. Wir machen die Fallunterscheidung:

(AA) für nach $(\neg \Rightarrow)$ abgeleitetes X_0 mit $\neg \phi \in \Sigma$, $X_0 = \ast \Sigma \Rightarrow \Theta, \phi$, $r = \{X_0\}$ ist nach (L12) $\neg \phi$ Opp.-Aussage in D und der Quasiursprung $\parallel \phi$ von $\text{ts}_B(r)$ ist Angriff auf $\neg \phi$.

(AB) für nach $(\Rightarrow \vee)$, $(\Rightarrow \Rightarrow)$, $(\Rightarrow \vee)$ abgeleitetes X_0 mit Δ aus $\{\psi_1 \vee \psi_2, \vee \psi_i [j/\vee_j], \Gamma \rightarrow \psi_i\}$ in Θ und $X_0 = \ast \Sigma' \Rightarrow \Theta, \psi_i$, $r = \{X_0\}$ ist nach (L12) Δ angegriffene Prop.-Aussage in D ; der Quasiursprung $\parallel \psi_i$ von $\text{ts}_B(r)$ ist also Verteidigung von Δ .

- (AC) für nach $(\Rightarrow \wedge)$ abgeleitetes $s = (x_1, x_2)$ mit $\psi_1 \wedge \psi_2 \in \Theta$,
 $x_1 = * \Sigma \Rightarrow \Theta, \psi_1$, $r = \{x_j\}$ gibt es nach (L12) mindestens eine
 durch in D nachfolgendes $k?$ angegriffene Prop.-Aussage
 $\|\psi_1 \wedge \psi_2$ in D und der Quasiursprung $\|\psi_j$ von $ts_B(r)$ ist
 Verteidigung gegen den letzten solchen Angriff $j?$ in D.
- (AD) für nach $(\Rightarrow \wedge)$ inferiertes $s = (\dots, x_m, \dots)$ mit $\wedge \psi \in \Theta$,
 $x_1 = * \Sigma \Rightarrow \Theta, \psi[v_1/\xi]$ gilt der Satz analog (AC) für $r = \{x_j\}$
 mit der Verteidigung $\|\psi[v_j/\xi]$ gegen den letzten Angriff
 $v_j?$ in D.
- (BA) der Nf-Sequent (x_0) von $* \Sigma \Rightarrow \Theta$ in B wurde inferiert
 nach $(\Rightarrow \neg)$. Der Satz gilt nach I.V. für gestrichenes (x_0) .
- (BB) der Nf-Sequent s wurde in B nach $(\wedge \Rightarrow)$, $(\vee \Rightarrow)$, $(\rightarrow \Rightarrow)$, $(\wedge \Rightarrow)$, $(\vee \Rightarrow)$
 inferiert mit der entsprechenden Aussage Γ in Σ , auf
 die $(\Rightarrow)$ angewendet wurde. Dann ist nach (L12) Γ Opp.-
 Aussage in D und der Quasiursprung $\|p$ von $ts_B(nb(s))$
 ist Angriff darauf mit nach (Df13) vollständigen Opp.-
 Verteidigungen q_i nach $\|p$ von Γ .

Wir definieren wieder:

(Df15) strat(B) ist der Baum aus allen in einem $strat_n(B)$ voll-
 endeten Ästen.

Es folgt sofort:

(Th2) Für jeden 1-Q-Baum B gibt es eine auf B reduzierbare₂
 1-Strategie T.

(Beweis) Analog (Th1) aus (L13), (L14), (Df15).

Die (Th1) und (Th2) entsprechenden Sätze für den intuitionistischen Fall gelten nicht uneingeschränkt. Wir brauchen dafür vielmehr die folgenden neuen Begriffe:

Sei eine 2_O-Strategie eine 2-Strategie, die in jedem Quasiast D als letzte angegriffene Prop.-Aussage ein $\|\alpha$ mit $\alpha \in \text{el}(L)$ hat.

Sei ein 2-Q_O-Baum ein 2-Q-Baum, in dem für jeden Endpunkt $\Sigma : \phi$ gilt: $\phi \in \text{el}(L)$

Ein auf die 2-Strategie $\underline{T}$ reduzierbarer₁ Baum $\underline{B}$ ist ein Baum, in dem es für jeden Endpunkt $\Sigma : \phi$ von B einen Quasiast D von T gibt, so daß alle Opp.-Aussagen aus D in Σ enthalten sind und die letzte angegriffene Prop.-Aussage in D gleich $\|\phi$ ist.

Eine auf den 2-Q-Baum $\underline{B}$ reduzierbare₂ Strategie $\underline{T}$ ist eine 2-Strategie, in der es für jeden Quasiast D von T einen Endpunkt $\Sigma : \phi$ von B gibt, so daß alle $\psi \in \Sigma$ Opp.-Aussagen in D und die letzte angegriffene Prop.-Aussage in D gleich $\|\phi$ ist.

Wir können nun vorwegnehmend formulieren:

(Th3) Für jede 2_O-Strategie T gibt es einen auf T reduzierbaren₁ 2-Q-Baum B.

(Th4) Für jeden 2-Q_O-Baum B gibt es eine auf B reduzierbare₂ 2-Strategie T

Wir modifizieren wieder den Begriff des 2-Q-Baums zu dem des 2-Q*-Baums und spalten die Regel ($\Rightarrow$) auf in:

($\Rightarrow_1$)	($t, \Sigma : \psi \Rightarrow \Delta$)	($\Rightarrow_2$)	($t, \Sigma : \psi \Rightarrow \Delta$)
	($t; 1, \Sigma, \psi : \psi \Rightarrow \Delta$)		($t; 1, \Sigma : \Delta$)

und bezeichnen ebenso einen so modifizierten $2-Q_0$ -Baum als $2-Q^*_0$ -Baum.

(L14) Wenn es einen auf die 2_0 -Strategie T reduzierbaren, $2-Q^*_0$ -Baum B gibt, dann gilt (a) es gibt auch einen auf T reduzierbaren, $2-Q$ -Baum B' und (b) B ist $2-Q^*_0$ -Baum, B' ist $2-Q_0$ -Baum.

(Beweis) (b) ergibt sich sofort aus der Definition der Reduzierbarkeit₁ und der 2_0 -Strategie; für (a) gilt:

Da B $2-Q^*_0$ -Baum ist, hat kein Endpunkt von B die Form $\sum: \Psi \rightarrow \Delta$, in allen Ästen a von B werden also alle im Postveniens auftauchenden Implikationen $\Psi \rightarrow \Delta$ durch Anwendung von $(:\rightarrow_2)$ eliminiert. Dadurch können wir aus B einen $2-Q_0$ -Baum B' herstellen, indem wir bei der ersten Anwendung von $(:\rightarrow_1)$ auf ein solches $\sum: \Psi \rightarrow \Delta$ den Ableitungsschritt ersetzen durch einen nach $(:\rightarrow)$. Für $i=1$ ersetzen wir dabei ab dem resultierenden Punkt $\sum, \Psi: \Delta$ in a in allen Postveniens bis zur notwendigen Eliminierung von $\Psi \rightarrow \Delta$ in B die Implikation durch Δ ; für $i=2$ ergänzen wir bis zum Ende von a jedes Praecurrens um Ψ . B' ist also ein $2-Q_0$ -Baum, für dessen Endpunkte $\sum': \Phi'$ es jeweils einen Endpunkt $\sum: \Phi$ von B mit $\sum \in \sum'$ und $\Phi = \Phi'$ gibt, woraus die Reduzierbarkeit₁ von B' auf T folgt.

Wir definieren analog (Df10):

(Df16) Es gelte für die 2-Strategie T, den Quasipunkt $x = \sum: \phi$ und den Mikrobaum K aus T für die Funktion $tq'_{(T,x)}$:

[wie (Df10), (a), (b) mit ' $tq'_{(T,x)}(K)$ ' für ' $tq_{(T,x)}(K)$ ',
($i:$) bzw. ($i:$) für ($\Rightarrow i$) bzw. ($i \Rightarrow$), $\gamma: \phi$ für $\gamma \Rightarrow \ominus$,
und $\gamma: \alpha$ für $\gamma \Rightarrow \neg, \alpha$ sowie neuem

(aa) für K gleich $\psi \quad \neg \psi$ ist $tq'_{(T,x)}(K)$ gleich
 $(\emptyset, \sum: \neg \psi) \quad (: \neg)$
 $((1), \sum, \psi: 0)$]

(L15) [wie (L4) mit ' $tq'_{(T,y)}(K)$ ' für ' $tq_{(T,y)}(K)$ ', '(Df9)' für '(Df8)' und '2-Q-Baum' für '1-Q-Baum']

(Df17) Es gelte bzgl. der 2-Strategie T für die Funktion qb'_n :
 [wie (Df11), mit $qb'_n(T)$ für $qb_n(T)$, $tq'_{(T,\alpha)}(\tilde{\alpha})$ für $tq_{(T,\alpha)}(\tilde{\alpha})$, ' $\emptyset: 0$ ' für ' $\emptyset \Rightarrow \emptyset$ ' und $\gamma: \phi$ für $\gamma \Rightarrow \ominus$]

(L16) Für jeden Ast a mit Endpunkt $x = \sum: \phi$ des fertigen Teils F von $qb'_n(T)$ gibt es einen Ast d mit Endpunkt $\ast q$ des qb'_n -ersetzten Teils N von T, so daß für den d entsprechenden Quasiast D gilt:

(a) Sei $\|\phi'$ die letzte angegriffene Prop.-Aussage in D, dann ist

(aa) für $\phi' \neq \psi_1 \wedge \psi_2, \bigwedge \xi \psi, \neg \psi$: $\phi = \phi'$

(ab) für $\phi' = \neg \psi$: $\phi = 0$

(ac) für $\phi' = \psi_1 \wedge \psi_2$ mit Nf $i2$ von $\|\phi'$: $\phi = \psi_1$

(ad) für $\phi' = \bigwedge \xi \psi$ mit Nf $v_i 2$ von $\|\phi'$: $\phi = \psi[v_1/\xi]$

(b) für alle Opp.-Aussagen ψ in D ist $\psi \in \Sigma$.

(c) der Endteil von $qb'_n(T)$ ab X und der Endteil von T ab $\ast q$ sind gleich.

(Beweis) Durch Induktion nach n .

I.B.: Analog (L5I.B.) für (Df16) statt (Df10)

I.V.: Der Satz gelte für das F von $qb'_n(T)$ für alle a mit Endpunkt $X = \sum \phi$ mit dem entsprechenden d von N mit Endpunkt $\ast q$ und dem dazugehörigen D .

I.S.: Alle Äste a^* des fertigen Teils F^* von $qb'_{n+1}(T)$ entstehen aus einem Ast a von F durch Anfügung eines Astes von $tq_{(T, X', 2)}(K)$ für den Mikrobaum K ab X oder sind gleich a mit trivialer Erfüllung des Satzes nach I.V.

Für K wie in (Df16) (ac), (ad), (af), (ag) gilt Behauptung (b) nach I.V. und Beh. (aa), da der Ursprung $\ast \phi'$ von K X mit ϕ' im Postveniensiens ersetzt

Für K wie in (Df16) (aa) gilt Beh. (ab) sowie (b) nach I.V.

Für K wie in (Df16) (ab) gilt Beh. (ac) sowie (b) nach I.V.

Für K wie in (Df16) (ae) gilt Beh. (ad) sowie (b) nach I.V.

Für K wie in (Df16) (ah), (b) gilt der Satz analog (L5), ebenso wie Beh. (d) in all diesen Fällen.

(L17) Der fertige Teil eines $qb'_n(T)$ ist 2-Q-Baum

(Beweis) Durch Induktion nach n .

I.B.: Analog (L6I.B.) für (Df16) statt (Df10)

I.V.: Der Satz gelte für $qb'_n(T)$.

I.S.: Der fertige Teil F^* von $qb'_{n+1}(T)$ entsteht aus dem fertigen Teil F von $qb'_n(T)$ durch Umwandlung der

Mikrobäume K ab jedem Endpunkt $X = \star \sum: \phi$ von F mit N_f in Teilbäume $E = tq'(T, X \cdot 2)$ (K) eines $2-Q^*$ -Baumes.

Nach (L15) muß für den Beweis des Satzes für $qb'_{n+1}(T)$ nur gezeigt werden, daß jeder Ursprung $X_0 = \star \sum_0: \phi_0$ eines solchen $tq'(t, X \cdot 2)$ (K) aus X ableitbar ist.

Nach (L16) gibt es für X einen Ast d des qb'_n -ersetzten Teils N von $qb_n(T)$ mit Endpunkt $\star q||$, der (L16) erfüllt, also nach (L16c) denselben Teilbaum ab $\star q||$ in T hat wie X in $qb'_n(T)$. Der Mikrobaum K aus dem $N_f \star || p$ von X ist also auch Mikrobaum ab $\star q||$ in T und es bestehen für den $N_f \star || p$ von X bzw. $\star q||$ folgende Möglichkeiten bzgl. des d entsprechenden Quasiasts D :

- (AA) $|| p = || \Psi$ ist Angriff auf eine Opp.-Aussage $\neg \Psi ||$ aus D .
Analog (L6) (AA) für $(\neg:)$.
- (AB) $|| p = || \Psi_1$ ist Verteidigung der letzten angegriffenen Prop.-Aussage $|| \Psi_1 \wedge \Psi_2$ aus D gegen den $N_f \text{!} ||$. Dann ist nach (L16) (ac) $\phi = \Psi_1$ und $X_0 = X$ ist nach (rep) ableitbar.
- (AC) $|| p = || \Psi_1$ ist Verteidigung der letzten angegriffenen Prop.-Aussage $|| \Psi_1 \vee \Psi_2$ aus D gegen den $N_f \text{?} ||$. Dann ist nach (L16) (aa) $\phi = \Psi_1 \vee \Psi_2$ und $X_0 = \star \sum: \Psi_1$ ist nach $(:\vee)$ aus X ableitbar.
- (AD) $|| p = || \Delta$ ist Verteidigung der letzten angegriffenen Prop.-Aussage $|| \Psi \rightarrow \Delta$ aus D gegen den $N_f \Psi ||$. Dann ist nach (L16) (aa) $\phi = \Psi \rightarrow \Delta$ und $X_0 = \star \sum: \Delta$ ist nach $(:\rightarrow_2)$ aus X ableitbar.
- (AE) $|| p = || \Psi[\vee_j / \xi]$ ist Verteidigung der letzten angegriffenen Prop.-Aussage $|| \wedge \xi \Psi$ aus D gegen den $N_f \vee_j \text{?} ||$. Dann ist

analog (AB) nach (L16) (ad) $X_0 = X$ nach (rep) ableitbar.

(AF) $\|p = \psi[V_j]\|$ ist Verteidigung der letzten angegriffenen Prop.-Aussage $\|V_j\psi$ aus D gegen den Nf ψ . Dann ist $X_0 = \sum \psi[V_j]\|$ analog (AC) nach $(:V)$ aus X ableitbar.

(AG) $\|p = \|\alpha!$ Verteidigung von $\|\alpha$. Analog (L6) (AG).

(BA) $\|p$ ist Angriff auf nicht elementares Φ aus D. Analog (L6) (BA).

(BB) $\|p$ ist Angriff auf elementares α aus D. Analog (L6) (BB).

(Df18) $qb'(T)$ ist der Baum aus allen Ästen, die in einem $qb'_n(T)$ vollendet sind.

(Th3) Für jede 2_0 -Strategie gibt es einen auf T reduzierbaren 2_1 -Q-Baum B.

(Beweis) Analog (Th1) aus (L14)-(L17) mit folgender zusätzlicher Überlegung:

Für die 2_0 -Strategie T ist in jedem Quasiast D die letzte angegriffene Prop.-Aussage $\|\alpha$ elementar. Für das nach (L16), (L17) dem Endpunkt $\sum \phi$ entsprechende D gilt also (L16) (aa) und $\phi = \alpha$.

Es folgt die Beweisskizze für (Th4):

(Df19) Bzgl. des 2_1 -Q-Baums B gilt für die Funktion ts'_B :^[6]

(a) Sei $X = \sum \phi$ Punkt in B mit dem Vg $\sum \phi'$ mit $\phi' \neq \phi$ oder gleich dem Ursprung $\sum \emptyset$ von B, so ergibt sich:

[wie (Df13) (a), (b), mit $ts'_B(x)$ für $ts_B(x)$, $\gamma: \phi$ für $\gamma \Rightarrow \emptyset$, $\gamma: \alpha$ für $\gamma \Rightarrow \gamma, \alpha$ und $(i:), (:i)$ für $(i \Rightarrow), (\Rightarrow i)$]

(L18) [wie (L11), mit '2-Strategie' für '1-Strategie',
 $ts'_B(x)$ für $ts_B(x)$ und 'der letzten in D angegriffenen
 Prop.-Aussage' für 'einer in D angegriffenen Prop.-
 Aussage']

Wieder streichen wir in einem 2-Q-Baum B alle Ableitungsschritte nach (rep), bevor wir die folgende Funktion anwenden:

(Df20) Für die Funktion $strat'_n$ gilt:

[wie (Df14), mit $strat'_n(B)$ für $strat_n(B)$, $ts'_B(x)$ für $ts_B(x)$, $'\phi: \phi_0'$ für $'\phi \Rightarrow \{\phi_0\}'$, $\Sigma_n: \phi_n$ für $\Sigma n \Rightarrow \Theta_n$,
 $\alpha = \phi$ für $\alpha \in \Theta$, α für Θ, α , $(i:), (i:)$ für $(i \Rightarrow), (\Rightarrow i)$]

Für den Endpunkt $_*\Sigma:\phi$ eines Astes a in einem 2-Q-Baum B sei das in a durch ϕ ersetzte ψ das $\psi \neq \phi$ aus dem Postveniens des letzten Punktes Y, von dem ab in a nur Punkte mit ϕ im Postveniens vorkommen. Dann gilt:

(L19) Für jeden Ast d des fertigen Teils F eines $strat'_n(B)$ mit Endpunkt $_*q||$ gibt es einen Ast a des $strat'_n$ -ersetzten Teils von B mit Endpunkt $X=_*\Sigma:\phi*$, für den bzgl. des d entsprechenden Quasiasts D gilt:

- (a) alle $\phi \in \Sigma$ sind Opp.-Aussagen in D
- (ba) für $\phi* \neq 0$ ist $||\phi*$ die letzte angegriffene Prop.-Aussage in D
- (bb) für $\phi* = 0$ ist für das in a durch $\phi*$ ersetzte $\neg\phi$ die letzte angegriffene Prop.-Aussage in D $||\neg\phi$.
- (ca) für $\phi* = \neg\phi$ ist $\phi||$ Opp.-Aussage in D
- (cb) für $\phi* = \psi \rightarrow \Delta$ ist $\psi||$ Opp.-Aussage in D
- (d) der Teilbaum A von $strat'_n(B)$ ab $_*q||$ ist gleich dem Teilbaum von B ab X.

(Beweis) Durch Induktion nach n .

I.B.: Analog (L12I.B.)

I.V.: Der Satz gelte für $\text{strat}'_n(B)$ für alle d von F mit Endpunkt $\ast q \parallel$ mit dem entsprechenden Quasiast D und den korrespondierenden a mit Endpunkt $X = \ast \sum: \phi \ast$

I.S.: Dann ergibt sich für jede Fortsetzung $d^\ast$ mit dem entsprechenden Quasiast $D^\ast$ in $\text{strat}'_{n+1}(B)$ von d :

$d^\ast$ entsteht durch Anhängen eines u.U. leeren Astes von $\text{ts}'_B(r)$ an $\ast q \parallel$ für den Nf oder die Nf $X_i \in r$ in $\text{strat}_n(B)$ von $\ast q \parallel$, wobei folgende Möglichkeiten zu berücksichtigen sind:

(AA) X_0 wurde in B nach $(\neg:), (:v), (:V)$ aus X abgeleitet, $r = \{X_0\}$. Dann ist $X_0 = \ast \sum: \phi$ und der betreffende Quasiast von $\text{ts}'_B(r)$ hat die Prop.-Aussage $\parallel \phi$ als Quasiursprung mit nachfolgendem Opp.-Angriff $q_1 \parallel$; ϕ ist also die letzte angegriffene Prop.-Aussage in $D^\ast$. Für $\phi = \neg \psi$ erfüllt $q_1 = \psi$ und für $\phi = \psi \rightarrow \Delta$ $q_1 = \psi$ Beh.(ca) und (cb).

(AB) Analog (L12) (AB)

(AC) Analog (L12) (AC)

(AD) Analog (L12) (AD)

(BA) $X_0 = \ast \sum, \psi: 0$ wurde in B nach $(:\neg)$ abgeleitet mit $\phi = \neg \psi$ (also $r = \{X_0\}$) und in D gilt Beh.(ba). Für $D^\ast = D$ und den neuen Endpunkt X_0 des $d^\ast$ entsprechenden a (X_0) gilt dann Beh.(bb).

(BB) Analog (L12) (BB)

(BC) Analog (L12) (BC)

Beweis von Beh.(d) analog (L12).

(L20) Der fertige Teil F von $\text{strat}'_n(B)$ ist 2-Strategie.

(Beweis) Durch Induktion nach n .

I.V.: Analog (L13I.B.)

I.V.: Der Satz gelte für den fertigen Teil F von $\text{strat}'_n(B)$.

I.S.: Der fertige Teil F^* von $\text{strat}'_{n+1}(B)$ entsteht aus F durch Anhängen eines $\text{ts}'_B(r)$ an den Endpunkt $\ast q\|$ jedes in $\text{strat}'_n(B)$ nicht vollendeten Astes d von F mit dem entsprechenden Quasiast D , wobei die $X_i \in r$ N_f von $\ast q\|$ in $\text{strat}'_n(B)$ sind sowie in B von dem nach (L19) $\ast q\|$ entsprechenden Endpunkt $\ast \bar{\Gamma}:\phi\ast$ des betreffenden Astes a des strat'_n -ersetzten Teils N von B .

Nach (L18) müssen wir beweisen, daß der jeweilige Quasiursprung $\|p$ von $\text{ts}'_B(r)$ Angriff auf eine Opp.-Aussage $\bar{\Gamma}\|$ aus D mit $\|p$ folgenden Verteidigungen $q_1\|$ von $\bar{\Gamma}\|$ oder Verteidigung des letzten in D angegriffenen $\|\Delta$ ist. Wir treffen die Fallunterscheidung:

- (AA) für nach $(\neg:)$ abgeleitetes X_0 mit $\neg\phi \in \Sigma$, $X_0 = \ast \Sigma:\phi$, $r = \{X_0\}$ ist nach (L19) $\neg\phi\|$ Opp.-Aussage in D und der Quasiursprung $\|p$ von $\text{ts}'_B(r)$ ist Angriff auf $\neg\phi\|$.
- (AB) für nach $(:\vee), (:\rightarrow), (:\vee)$ abgeleitetes X_0 mit $\phi\ast \in \{\psi_1 \vee \psi_2, \vee \{\psi_1 \bar{\Gamma}:\phi_1 / \vee_1\}, \bar{\Gamma} \rightarrow \psi_1\}$ und $X_0 = \ast \Sigma:\psi_1$, $r = \{X_0\}$ ist nach (L19) $\|\phi\ast \neq \emptyset$ die letzte angegriffene Prop.-Aussage in D und der Quasiursprung $\|\psi_1$ von $\text{ts}'_B(r)$ ist Verteidigung von $\|\phi\ast$.
- (AC) für nach $(:\wedge)$ inferiertes $s = (X_1, X_2)$ mit $\phi\ast = \psi_1 \wedge \psi_2$, $X_1 = \ast \bar{\Gamma}:\psi_1$, $r = \{X_1\}$ ist nach (L19) $\|\phi\ast$ die letzte angegriffene

Prop.-Aussage in D mit $Nf \dot{j}?$ und der Quasiursprung $\dot{j}$
von $ts'_B(r)$ ist Verteidigung von $\|\phi^*$.

(AD) für nach $(:\wedge)$ inferiertes s gilt der Satz analog (AC)

(BA) Analog (L13) (BA)

(BB) Analog (L13) (BB)

(Df21) $strat'_n(B)$ ist der Baum aus allen in einem $strat'_n(B)$
vollendeten Ästen.

(Th4) Für jeden $2-Q_0$ -Baum B gibt es eine auf B reduzierbare₂
2-Strategie T.

(Beweis) Analog (Th2) aus (L19), (L20) mit folgender zusätzlicher
Überlegung:

Da B $2-Q_0$ -Baum ist, ist in jedem Endpunkt $\sum : \alpha$ von
 $B \alpha \in el(L)$ und daher $\neq 0$. α ist also die letzte ange-
griffene Prop.-Aussage im entsprechenden Quasiast D
von T.

[1] Von unten nach oben gelesen, ergeben diese Regeln^{in (c)} die halb-
formale Version des erweiterten Kalküls $\mathcal{L}_{\mathcal{H}}$ in: R. Smullyan, First-
order Logic, New York 1968, S.108ff mit
folgendem Unterschied: Das genaue Äquivalent zu $\mathcal{L}_{\mathcal{H}}$ wäre ein
1-Q-Baum, in dem bei den Ableitungsschritten die entsprechenden
Aussagen im Vg des abgeleiteten Nf (z.B. in $(\neg \Rightarrow)$ das $\neg \psi \in \sum$)
im Nf auch eliminiert werden könnten. Nun sind aber (a) alle
"umgedrehten" 1-Q-Bäume halbformale Ableitungen nach $\mathcal{L}_{\mathcal{H}}$ und

(b) können alle "umgedrehten" halbformalen ξ_1 -Ableitungen in 1-Q-Bäume überführt werden, indem man in allen Ästen alle eliminierten Aussagen bis zum Endpunkt wieder in die Punkte einführt.

[2] Für die "umgedrehte" vollformale Version (vgl. Anm. [1]) siehe M. Dummet, *Elements of Intuitionism*, Oxford 1977, S.133.

[3] Vgl. [Lorenzen/Schwemmer], s.86

[4] In (Df13) und im Rest des Beweises von (Th2) bleibt im Text ein technisches Problem unberücksichtigt, dessen explizite Miteinbeziehung einerseits den ohnehin sehr umständlichen Beweis bis zur Undurchsichtigkeit verkomplizieren würde und das andererseits für den begrifflichen Inhalt des Beweises von untergeordneter Bedeutung ist: das Problem der Numerierung der Züge in den Ästen einer Strategie. Eine Möglichkeit, eine stillschweigende Regelung zu treffen, auf die man sich im Zweifelsfall während des Beweises rückbeziehen kann, ist die folgende:

Die Werte von ts_B sind Mikrobäume⁻ von 1-Strategien⁻. Eine 1-Strategie⁻ T^- ist ein Baum, zu dem es eine 1-Strategie T gibt, so daß $x \in T^-$ gdw $\exists X \in T (X^- = (0, p), X = (n, p) \circ t)$. Entsprechend seien die Begriffe des Zugs⁻, des Angriff⁻ etc. aufzufassen und die betreffenden Ausdrücke im Beweis von (Th2) durchgehend so zu verstehen. (Wir berücksichtigen also dann in einem Dialogakt z nur die Gestalt des Satzes von z . Dies ist übrigens die Art, wie die betreffenden Begriffe in der Literatur des DK eingeführt werden, wobei die vor allem für den intuitionistischen Fall wichtige Numerierung ohne gesonderte technische Behandlung auftaucht.) Offensichtlich läßt sich ein $strat(T)$ ((Df15)) aufgrund der vorhergehenden Ausführungen ohne weiteres durch die Ergänzung seiner Punkte um die jeweilige Numerierung zu einer 1-Strategie T vervollständigen.

[5] Zur Vereinfachung werden wir im folgenden in eindeutigen Fällen manchmal z.B. von einem Zug $\star^{\circ}p$ aus T sprechen, wenn wir $^{\circ}p$ meinen, also die dialogischen Eigenschaften eines Quasipunkts auf den entsprechenden Punkt einer Strategie übertragen.

[6] Auch hier ist die fehlende Numerierung der Züge analog dem klassischen Fall zu behandeln, vgl. Anm.[4] oben.

(I4) Materiale Wahrheit und semantische Wahrheit

Die k^* -Strategien bilden die Grundlage für die Begriffe der materialen Wahrheit einer Aussage, auf die im DK großer Wert gelegt wird.

Analog unseren Überlegungen zu den k^* -Strategien determinieren auch diese Begriffe nicht allgemein Modelle von Komponenten einer konkret realisierbaren Praxis.

Intuitiv gesprochen, soll eine Aussage ϕ einer Sprache L genau dann in einer Sprachsituation (L, R) material wahr sein, wenn einem Proponenten eine Strategie zur Verfügung steht, mit der er auf jeden Fall einen gewonnenen Dialog um ϕ erzwingen kann. Dies läßt sich sehr einfach präzisieren:

(Df22) ϕ ist material k^* -wahr bzgl. S

gdw

(a) S ist Sprachsituation

(b) es gibt eine k^* -Strategie T in S^1 für ϕ , für die gilt:
jeder Quasiast D von T ist bzgl. S gewonnen.

Hierbei heiße T materiale k^* -Gewinnstrategie bzgl. S für ϕ .

Wenn es eine solche materiale k^* -Strategie T_0 mit endlich vielen Punkten gibt, so kann unser intuitives Vorverständnis sofort konkretisiert werden: Man kann dann T_0 auffassen als das Modell etwa einer konkret herstellbaren Tafel, auf der ein Proponent nach jedem Opponentenzug ablesen kann, welcher Zug jetzt von ihm durchzuführen ist, um zu einem bzgl. S gewonnenen materialen Dialog zu kommen (diese Tafel gibt natürlich kein Verfahren an, wie z.B. eingegangene Dialogverpflichtungen praktisch einzulösen sind).

Ein derartiges T_0 gibt es z.B. für jede material wahre junktorenlogische Formel Δ , da in allen Strategien für Δ nur endliche Verzweigungen vorkommen und alle Äste endlich sind. Auf den Status unendlicher materialer Gewinnstrategien für quantorenlogische Aussagen werden wir noch zurückkommen.

Die Frage nach dem Verhältnis der materialen Wahrheit zu dem üblichen Begriff der semantischen Wahrheit liegt nahe und läßt sich (mit klassischen Mitteln in der Metasprache, vgl. O. S.29) präzise beantworten. Zu diesem Zweck legen wir kursorisch für die Sprachsituation S den folgenden Begriff fest:

(Df23) $\text{sem}(S)$ sei ein 2-tupel (W, F) mit $W \cup F$ als der Menge aller Aussagen von S^1 , für das gilt:

- | | |
|--|--|
| (a) alle Elementaraussagen $\alpha \in \text{bw}(S)^1$ sind in W und
alle Elementaraussagen $\alpha \in \text{bw}(S)^2$ sind in F | |
| (baa) $\neg\Phi \in W$ gdw
$\Phi \in F$ | (bab) $\neg\Phi \in F$ gdw
$\Phi \in W$ |
| (bba) $\Phi_1 \wedge \Phi_2 \in W$ gdw
$\Phi_1, \Phi_2 \in W$ | (bbb) $\Phi_1 \wedge \Phi_2 \in F$ gdw
$\Phi_1 \in F$ oder $\Phi_2 \in F$ |
| (bca) $\Phi_1 \vee \Phi_2 \in W$ gdw
$\Phi_1 \in W$ oder $\Phi_2 \in W$ | (bcb) $\Phi_1 \vee \Phi_2 \in F$ gdw
$\Phi_1, \Phi_2 \in F$ |
| (bda) $\Phi \rightarrow \Psi \in W$ gdw
$\Phi \in F$ oder $\Psi \in W$ | (bdb) $\Phi \rightarrow \Psi \in F$ gdw
$\Phi \in W$ und $\Psi \in F$ |
| (bea) $\bigwedge f \Phi \in W$ gdw
für alle $v_j \in \text{ind}(S^1)$
gilt: $\Phi[v_j/f] \in W$ | (beb) $\bigwedge f \Phi \in F$ gdw
es gibt ein $v_j \in \text{ind}(S^1)$ mit
$\Phi[v_j/f] \in F$ |
| (bfa) $\bigvee f \Phi \in W$ gdw
es gibt ein $v_j \in \text{ind}(S^1)$
mit $\Phi[v_j/f] \in W$ | (bfb) $\bigvee f \Phi \in F$ gdw
für alle $v_j \in \text{ind}(S^1)$ gilt:
$\Phi[v_j/f] \in F$ |

Wir nennen eine Aussage Φ von S^1 semantisch wahr bzgl. S gdw sie in $\text{sem}(S)^1$, semantisch falsch bzgl. S gdw sie in $\text{sem}(S)^2$ enthalten ist.

Wir zeigen zunächst für die Sprachsituation S:

(L21) Φ ist semantisch wahr bzgl. S

$\supset$

Φ ist material 3-wahr bzgl. S

(Beweis) Für $\Phi \in \{\Psi, \neg\Psi\}$ durch Induktion nach dem Grad von Ψ .

I.B.: Sei $\Phi = \Psi$ Elementaraussage von S^1 . Dann gilt:

Sei Φ semantisch wahr bzgl. S. Dann ist n. (Df23a), Dfbw(S) Φ elementar verteidigbar in S und

$$\begin{array}{c} \Phi \\ ? \parallel \\ \Phi! \end{array}$$

ist materiale 3-Gewinnstrategie bzgl. S für Φ und Φ ist material 3-wahr bzgl. S.

Sei $\Phi = \neg\Psi$ für die Elementaraussage Ψ von S^1 und semantisch wahr bzgl. S. Dann ist Ψ semantisch falsch bzgl. S und $\Psi!$ ist nicht einlösbar in S, d.h. T gleich

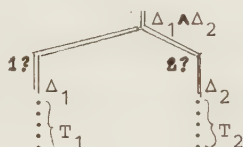
$$\begin{array}{c} \neg\Psi \\ \Psi \parallel \\ ? \\ \Psi! \parallel \end{array}$$

ist Gewinnstrategie für Φ bzgl. S.

I.V.: Der Satz gelte für alle $\Phi \in \{\Psi_0, \neg\Psi_0\}$ mit Ψ_0 vom Grad $< n$.

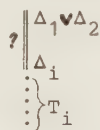
I.S.: Dann ergibt sich für

- (A) $\Phi = \Psi$ vom Grad $n+1$:
- (AA) $\Psi = \neg \Psi_0$ für Ψ_0 vom Grad n . Dieser Fall ist bereits in der I.V. enthalten.
- (AB) $\Psi = \Delta_1 \wedge \Delta_2$ für Δ_i vom Grad $\leq n$. Sei Ψ semantisch wahr, dann ist jedes Δ_i semantisch wahr und n.I.V. material 3-wahr. Die 3-Gewinnstrategien T_i ab Δ_i lassen sich verbinden zu der für Ψ gleich



und Φ ist material 3-wahr.

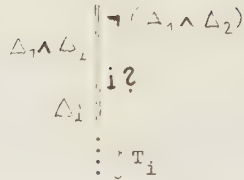
- (AC) $\Psi = \Delta_1 \vee \Delta_2$ für Δ_i vom Grad $\leq n$. Dann ist für semantisch wahres Ψ ein Δ_i semantisch wahr und die 3-Gewinnstrategie T_i n.I.V. ab Δ_i läßt sich ergänzen zu der für Ψ



und Φ ist material 3-wahr.

- (AD) $\Psi = \neg \Gamma \Delta$ für Γ, Δ vom Grad $\leq n$. Dann ist entweder Γ semantisch falsch, also $\neg \Gamma$ semantisch wahr, oder Δ semantisch wahr. Im ersten Fall läßt sich die Gewinnstrategie n.I.V. für $\neg \Gamma$ gleich

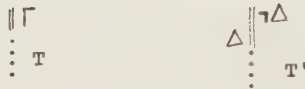




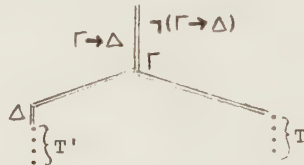
und ϕ ist material 3-wahr.

(BC) $\phi = (\Delta_1 \vee \Delta_2)$ für Δ_i vom Grad $\leq n$. Dann gilt der Satz für semantisch wahres $\phi = \neg(\Delta_1 \vee \Delta_2)$, also auch $\neg\Delta_1 \wedge \neg\Delta_2$ analog (BB) und (AB).

(BD) $\psi = \neg\Gamma \rightarrow \Delta$ für Γ, Δ vom Grad $\leq n$. Dann ist für semantisch wahres $\phi = \neg(\neg\Gamma \rightarrow \Delta)$ auch $\neg\Gamma \wedge \neg\Delta$ semantisch wahr, also auch beide Teilaussagen. Dann lassen sich die 3-Gewinnstrategien nach I.V.



kombinieren zu



und ϕ ist material 3-wahr.

(BE) $\psi = \bigwedge \Delta$ für Δ vom Grad $\leq n$. Analog (BB) für das semantisch wahre $\bigvee \neg\Delta$.

(BF) $\psi = \bigvee \Delta$ für Δ vom Grad $\leq n$. Analog (BC) für das semantisch wahre $\bigwedge \neg\Delta$.

Wir erhalten aus diesem Satz das folgende einfache Lemma:

(L22) Φ ist semantisch wahr bzgl. S

$\supset$

Φ ist material 3-wahr bzgl. S

$\supset$

Φ ist material 2-wahr bzgl. S

$\supset$

Φ ist material 1-wahr bzgl. S

(Beweis) Unmittelbar aus (L21), (Df22), (L2).

Um (L22) von unten nach oben zu beweisen, bedienen wir uns des Begriffs des 1-Q-Baumes. Wir definieren zunächst (das 's' in 'wahr_s' soll andeuten, daß es sich bei diesem Begriff der Wahrheit um einen im weiteren Sinne semantischen handelt):

(Df24) Φ ist 1-Q-wahr_s bzgl. S

gdw

(a) S ist Sprachsituation

(b) es gibt einen 1-Q-Baum für Φ , wobei es für jeden Endpunkt $\sum \rightsquigarrow \Theta$ von B ein $\alpha \in \text{el}(S^*1)$ gibt, für das gilt: entweder

(ba) α ist semantisch falsch bzgl. S und $\alpha \in \sum$

oder

(bb) α ist semantisch wahr bzgl. S und $\alpha \in \Theta$

Einen 1-Q-Baum wie in (b) nennen wir einen 1-Q-Wahrheitsbaum_s bzgl. S für Φ .

(L23) ϕ ist material 1-wahr bzgl. S

$\supset$

ϕ ist 1-Q-wahr_s bzgl. S

(Beweis) Sei ϕ material 1- $\bigcirc$ -wahr bzgl. S. Dann gibt es eine 1-Gewinnstrategie T für ϕ bzgl. S, in der jeder Quasiast D ein $\alpha!$ mit nicht einlösbarem $\alpha!$, also ein angegriffenes $\alpha!$ mit elementar nicht verteidigbarem α , oder ein $\|\alpha!$ mit einlösbarem $\alpha!$, also ein angegriffenes $\|\alpha$ mit elementar verteidigbarem α enthält. Nach (Th1) gibt es dann einen auf T reduzierbaren₁ 1-Q-Baum B für ϕ in S'^1 , der in jedem Endpunkt $\Sigma \Rightarrow \bigcirc$ für einen Quasiast D von T in Σ alle Ψ mit $\Psi!$ in D und in $\bigcirc$ alle Δ mit angegriffenem $\|\Delta$ in D enthält, also entweder ein elementar nicht verteidigbares und daher semantisch falsches α in Σ oder ein semantisch wahres α in $\bigcirc$ hat und ϕ ist nach (Df24) 1-Q-wahr_s bzgl. S.

Um die Äquivalenz der drei materialen Wahrheitsbegriffe untereinander und mit der semantischen und 1-Q-Wahrheit_s zu beweisen, benötigen wir nur noch das folgende Lemma (L24). Da das Ergebnis aufgrund der bekannten semantischen Komponente der unseren Q-Bäumen eng verwandten Beth-Tableaux nicht weiter überrascht, können wir den Beweis etwas straffen.

Hierfür erweitern wir den Begriff der 1-Q-Wahrheitsbaums_s bzgl. S so, daß wir auch Bäume B mit einem Ursprung $\emptyset \Rightarrow M$ berücksichtigen, wobei M eine u.U. unendliche Menge von Aussagen von S'^1 ist und alle Ableitungsschritte in B nach den üblichen Regeln in (Df8) verlaufen sowie alle (endlichen) Äste (Df24) (b) erfüllen für ein $\alpha \in \text{el}(S'^1)$. Ferner setzen wir in (L24) still-

schweigend voraus, daß in B alle Ableitungsschritte nach (rep) gestrichen wurden.

(L24) ϕ ist 1-Q-wahr_S bzgl. S

$\supset$

ϕ ist semantisch wahr bzgl. S

(Beweis) Durch Induktion nach dem Grad von ψ für $\phi \in \{\psi, \neg\psi\}$ zusammen mit dem folgenden Hilfssatz:

(H.S.) Für jede Menge $M = \{\phi_1, \dots, \phi_i, \dots\}$ von Aussagen $\phi_i \in \{\Delta, \neg\Delta\}$ mit Δ vom Grade n gilt:

Wenn es einen 1-Q-Wahrheitsbaum_S aus $\emptyset \ni M$ bzgl. S gibt, dann gibt es für mindestens ein $\phi_i \in M$ einen 1-Q-Wahrheitsbaum_S für ϕ_i bzgl. S.

I.B.: Es gelte $\phi \in \{\psi, \neg\psi\}$ für ψ vom Grade 1. Dann ergibt sich:

(AA) Sei $\phi = \psi$ für den Elementarsatz ψ und ψ 1-Q-wahr_S bzgl. S. Der einzig mögliche 1-Q-Baum T_0 für ψ hat die Form

$$*\emptyset \Rightarrow \{\psi\}$$

Da T_0 nach Voraussetzung 1-Q-Wahrheitsbaum_S für ψ ist, muß ψ semantisch wahr bzgl. S sein.

(AB) Sei $\phi = \neg\psi$ für den Elementarsatz ψ und $\neg\psi$ 1-Q-wahr_S bzgl. S. Der einzig mögliche 1-Q-Wahrheitsbaum_S T_0' für ψ hat die Form:

$$*\emptyset \Rightarrow \{\neg\psi\}$$

$$*\{\psi\} \Rightarrow \{\neg\psi\}$$

und ψ muß semantisch falsch, also $\phi = \neg\psi$ semantisch wahr bzgl. S sein, da das im Praecurrens auftauchende ψ die einzige Elementaraussage in T_0' ist.

Der (H.S.) gilt trivialerweise für ein $M = \{\alpha, \dots, \neg\beta, \dots\}$ für $\alpha, \beta \in \text{el}(S^1)$, da die in (AA) und (AB) dargestellten Ableitungsschritte die einzig möglichen in einem 1-Q-Wahrheitsbaum_S aus $\emptyset \Rightarrow M$ sind und somit entweder ein $\alpha \in M$ semantisch wahr oder für ein $\neg\beta \in M$ β semantisch falsch, also $\neg\beta$ semantisch wahr sein muß bzgl. S; er folgt aus (L22,23)

I.V.: Es gelte der Satz mit (H.S.) für alle $\phi^*, \neg\phi^*$ mit ϕ^* vom Grade $\leq n$.

I.S.: Dann gilt für $\phi_0 \in \{\phi, \neg\phi\}$ für ϕ vom Grad $n+1$:

(BA) Sei $\phi_0 = \phi$ vom Grad $n+1$ mit folgenden Möglichkeiten:

(BAA) $\phi = \neg\psi$ für ψ vom Grad n . Dann gilt der Satz mit (H.S.) nach I.V..

(BAB) $\phi = \psi_1 \wedge \psi_2$ für ψ_i vom Grad $\leq n$. Sei ϕ 1-Q-wahr_S, dann hat der 1-Q-Wahrheitsbaum_S B für ϕ den Anfang:

$$\frac{* \emptyset \Rightarrow \{\psi_1 \wedge \psi_2\}}{* \emptyset \Rightarrow \{\phi, \psi_1\} \quad * \emptyset \Rightarrow \{\phi, \psi_2\}}$$

Sei nun ϕ semantisch falsch, dann ist ψ_1 oder ψ_2 semantisch falsch bzgl. S und nach I.V. nicht 1-Q-wahr_S. Für jedes ψ_i läßt sich aber aus dem Teilbaum B_i von B aus $\emptyset \Rightarrow \{\phi, \psi_i\}$ ein 1-Q-Wahrheitsbaum_S B_i für ψ_i konstruieren, indem in jedem Postveniens in B_i ϕ gestrichen sowie in neuen Verzweigungen in B

$$\frac{* \Sigma \Rightarrow \emptyset}{* \Sigma \Rightarrow \emptyset, \psi_1 \quad * \Sigma \Rightarrow \emptyset, \psi_2}$$

durch auf ϕ angewendetes $(\Rightarrow \wedge)$ nur der Teilbaum A_i aus $* \Sigma \Rightarrow \emptyset, \psi_i$ an $* \Sigma \Rightarrow \emptyset$ angehängt wird, im Gegensatz zur Annahme.

(H.S.) Sei $M_1 = M_0 \cup M_1'$ mit der Menge M_0 von Aussagen $\phi_1^* \wedge \phi_2^* \wedge \dots \wedge \phi_n^*$ vom Grad $\leq n$ und der Menge M_1' von $\psi_1 \wedge \psi_2$ mit ψ_i vom Grad $\leq n$. Sei B_1 1-Q-Wahrheitsbaum_S aus $\emptyset \Rightarrow M_1$ bzgl. S und sei kein $\phi \in M_1$ 1-Q-wahr_S. Dann ist nach (L22), (L23) mit Modus tollens jedes solche ϕ semantisch falsch, also für alle $\psi_1 \wedge \psi_2 \in M_1'$ mindestens ein ψ_i semantisch falsch. Dann läßt sich aus der Menge M_1' eine Menge M_1^- der falschen Teilaussagen ψ_i der $\phi \in M_1'$ bilden und $M_1^* = M_0 \cup M_1^-$ ist eine Menge von semantisch falschen ψ vom Grad $\leq n$. Nach I.V. ist dann keines dieser ψ 1-Q-wahr_S und nach I.V. (H.S.) gibt es keinen 1-Q-Wahrheitsbaum_S aus $\emptyset \Rightarrow M_1^*$. Ein solcher Baum läßt sich aber aus B_1 konstruieren, indem man wie oben alle $\psi_j \in M_1^*$ streicht und an den Verzweigungen nach $(\Rightarrow \wedge)$ für $\psi_1 \wedge \psi_2 \in M_1'$ nur die Teilbäume aus $\Sigma \Rightarrow \Theta, \psi_i \in M_1^*$ anhängt unter Belassung der für die 1-Q-Wahrheit_S entscheidenden Elementarsätze α in den beibehaltenen Teilbäumen.

(BAC) Sei $\phi = \psi_1 \vee \psi_2$ für ψ_i vom Grad $\leq n$. Wenn es einen 1-Q-Wahrheitsbaum_S B für ϕ aus $\emptyset \Rightarrow \{\psi_1 \vee \psi_2\}$ gibt, dann gibt es auch einen solchen Baum B^* aus $\emptyset \Rightarrow \{\psi_1, \psi_2\}$, wobei in B ϕ durch ψ_1, ψ_2 ersetzt wird und alle Anwendungen von $(\Rightarrow \vee)$ auf in B zu Schritten nach (rep) werden. Nach I.V. (H.S.) ist dann ψ_1 oder ψ_2 1-Q-wahr_S und nach I.V. auch semantisch wahr, ϕ ist also semantisch wahr.

(H.S.): Sei $M_2 = M_1 \cup M_2'$ mit M_1 wie in (BAB) und der Menge der Adjunktionen $\psi_1 \vee \psi_2$ mit ψ_i vom Grad $\leq n$ M_2' .

Sei B_2 1-Q-Wahrheitsbaum_S aus $\emptyset \models M_2$, dann läßt sich B_2 wie oben in einen 1-Q-Wahrheitsbaum_S aus $\emptyset \models M_2^*$ umwandeln mit $M_2^* = M_1 \cup M_2^-$, wobei M_2^- die Menge der unmittelbaren Teilaussagen der $\phi \in M_2'$ ist. Da für M_2^* der (H.S.) nach I.V. und (BAB) gilt, ist mindestens ein $\psi_i \in M_2^*$ 1-Q-wahr_S. Für $\psi_i \in M_1$ gilt dann der H.S. trivialerweise, für $\psi_i \in M_2^-$ ist nach I.V. ψ_i semantisch wahr zusammen mit der betreffenden Aussage $\phi = \psi_1 \vee \psi_2$ ($i \in \{1, 2\}$) aus M_2' und ϕ ist nach (L22), (L23) 1-Q-wahr_S.

(BAD) $\phi = \psi \rightarrow \Delta$ für ψ, Δ vom Grad $\leq n$. Sei B 1-Q-Wahrheitsbaum_S für ϕ bzgl. S . Dann hat B den Anfang:

$$*\emptyset \Rightarrow \{\psi \rightarrow \Delta\} \quad (\Rightarrow \rightarrow)$$

$$*\{\psi\} \Rightarrow \{\psi \rightarrow \Delta, \Delta\}$$

Dieses B kann umgewandelt werden in einen 1-Q-Wahrheitsbaum_S B' für $\neg\psi \vee \Delta$ mit Anfang

$$*\emptyset \Rightarrow \{\neg\psi \vee \Delta\} \quad (\Rightarrow \vee)$$

$$*\emptyset \Rightarrow \{\neg\psi \vee \Delta, \neg\psi\} \quad (\Rightarrow \neg)$$

$$*\{\psi\} \Rightarrow \{\neg\psi \vee \Delta, \neg\psi\} \quad (\Rightarrow \vee)$$

$$*\{\psi\} \Rightarrow \{\neg\psi \vee \Delta, \neg\psi, \Delta\}$$

durch Ersetzung von $\psi \rightarrow \Delta$ durch $\neg\psi \vee \Delta, \neg\psi$ im weiteren Verlauf unter Beibehaltung der entscheidenden Elementaraussagen. Für 1-Q-wahres_S $\neg\psi \vee \Delta$ ergibt sich aber analog (BAC) nach I.V., I.V.(H.S.), daß $\neg\psi$ oder Δ semantisch wahr, also ψ semantisch falsch oder Δ semantisch wahr, also $\psi \rightarrow \Delta$ semantisch wahr ist.

Der (H.S.) gilt analog diesen Überlegungen und (BAC) nach I.V., I.V. (H.S.).

(BAE) $\phi = \bigwedge \psi$. Analog (BAB) für den unendlichen Fall.

(BAF) $\phi = \bigvee \psi$. Analog (BAC) für den unendlichen Fall.

(BB) Sei $\phi^* = \neg \phi$ für ϕ vom Grade $n+1$ mit folgenden Möglichkeiten:

(BBA) $\phi = \neg \psi$ für ψ vom Grad n . Dann ist $\phi^* = \neg \neg \psi$ und es gilt:

Angenommen, ϕ^* ist 1-Q-wahr_S bzgl. S, dann gibt es einen 1-Q-Wahrheitsbaum_S B ab $\emptyset = \{\neg \neg \psi\}$ mit dem Anfang

$$*\emptyset \Rightarrow \{\neg \neg \psi\} \quad (\Rightarrow)$$

$$*\{\neg \psi\} \Rightarrow \{\neg \neg \psi\} \quad (\Rightarrow)$$

$$*\{\neg \psi\} \Rightarrow \{\neg \neg \psi, \psi\}$$

und der 1-Q-Wahrheitsbaum_S B₀ für ψ läßt sich aus dem Teilbaum B' von B aus $\{\neg \psi\} \Rightarrow \{\neg \neg \psi, \psi\}$ herstellen, indem man in B' durchgehend im Praecurrens $\neg \psi$ und im Postveniens $\neg \neg \psi$ streicht. ψ ist also 1-Q-wahr_S und nach I.V. semantisch wahr bzgl. S, also auch $\neg \neg \psi = \phi^*$ semantisch wahr bzgl. S.

(H.S.): Sei $M_6 = M_5 \cup M_6'$ für die Menge M_5 von Aussagen vom Grad $\leq n+1$, wobei M_6' Menge von $\neg \neg \psi$ für ψ vom Grad n ist (für M_5 ist der (H.S.) bereits in (BA) bewiesen). Sei B₆ 1-Q-Wahrheitsbaum_S aus $\emptyset \Rightarrow M_6$, aber es gebe keinen solchen Baum für ein $\phi \in M_6$. Dann ist nach (L22), (L23) kein $\phi \in M_6$ semantisch wahr bzgl. S und nach (Df23) gilt dies auch für $M_6^* = M_5 \cup M_6^-$ mit der Menge M_6^- von ψ mit $\neg \neg \psi \in M_6'$. Nach I.V. und (BA) ist dann kein $\psi \in M_6^*$ 1-Q-wahr_S und nach I.V. (H.S.) gibt es keinen 1-Q-Wahrheitsbaum_S aus $\emptyset \Rightarrow M_6^*$. Ein solcher Baum B ist aber aus B₆ herstellbar,

indem man wie oben alle $\neg\neg\psi \notin M_0^*$ mit den entsprechenden $\neg\psi$ im Postveniens bzw. im Praecurrens gestrichen werden unter Belassung der entscheidenden elementaren Aussagen.

(BBB) Es gelte $\phi \in \{\psi \rightarrow \Delta, \psi_1 \wedge \psi_2, \neg \psi_1 \vee \psi_2, \bigwedge \neg \psi, \bigvee \neg \psi\}$ mit ϕ vom Grade $n+1$. Dann ergibt sich der Satz mit (H.S.) analog (BAD) durch die Umwandlung der entsprechenden Wahrheitsbäume_s für $\phi^* = \neg\phi$ in solche für die semantisch äquivalenten $\psi \wedge \neg\Delta$, $\neg\psi_1 \vee \neg\psi_2$, $\neg\psi_1 \wedge \neg\psi_2$, $\bigvee \neg \psi$, $\bigwedge \neg \psi$ und Benutzung der entsprechenden Ergebnisse aus (BA), der I.V. und I.V. (H.S.).

Wir erhalten damit:

(Th5) ϕ ist semantisch wahr bzgl. S

gdw

ϕ ist material 3-wahr bzgl. S

gdw

ϕ ist material 2-wahr bzgl. S

gdw

ϕ ist material 1-wahr bzgl. S

Dem unbefangenen Leser der Schriften des DK könnte dieses Ergebnis als überraschend und als irgendwie relevant oder mit Folgen für das Programm behaftet erscheinen, vor allem angesichts gewisser Auseinandersetzungen um die "richtige" materiale Logik innerhalb des DK^[1]. Da jedoch kein tangibler Punkt tatsächlich auf der Verschiedenheit der Versionen der materialen Wahrheiten beruht, diskutieren wir dieses Ergebnis nicht weiter, etwa in Hinsicht auf die Erlaubtheit der dabei verwendeten formalen Mittel.

Es sollte jedoch betont werden, daß ein solcher oder ähnlicher Tatbestand als im DK teilweise durchaus bekannt und nicht weiter als tragisch beurteilt gelten muß.^[2]

Mit der Einordnung des Begriffskomplexes der materialen Wahrheit in den Wissenschaftsaufbau des DK werden wir uns über das zu Beginn dieses Kapitels Diskutierte hinaus in Teil II befassen.

[1] Vgl. etwa Chr.Thiel, Über Ursprung und Problemlage des argumentationstheoretischen Aufbaus der Logik, in: C.F.Gethmann(Hrsg.), Theorie des wissenschaftlichen Argumentierens, Ffm 1980

[2] Vgl. hierzu K.Lorenz, Die dialogische Rechtfertigung der effektiven Logik, in: F.Kambartel/J.Mittelstraß(Hrsg.): Zum normativen Fundament der Wissenschaft, Frankfurt/M. 1973, S. 261f.

(I5) Formale Wahrheit und formale Ableitbarkeit

Mit der Einführung der Begriffe des formalen Dialogs und der formalen Gewinnstrategie bewegen wir uns wieder im Bereich des Endlichen, was uns erlaubt, diese Entitäten wie die materialen Dialoge als abstrakte Modelle konkret realisierbarer Objekte oder Handlungen aufzufassen.

Wir müssen zunächst den Hintergrund unserer Sprache L erweitern um die konstante Menge PAR von abzählbar ^(unendlich) vielen allgemein-repräsentierenden Parametern $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$. Wir führen den Begriff der Aussage über L ein für Aussagen von L und $\phi [\xi_j, v]$ für Aussagen ϕ von L , $v \in ind(L)$ und $\xi_j \in PAR$. $el^+(L)$ sei die Menge der Elementaraussagen über L . Ferner unterscheide sich ein Dialogakt über L von einem Dialogakt von L höchstens dadurch, daß sein Satz ein Satz über L ist, d.h. eine Aussage über L oder ein $\xi_j^?$ für $\xi_j \in PAR$.

(Df25) Es gelte für die Sprache L und die Aussagen $\phi, \psi [v, \xi]$ über L :

(1) z_2 ist Angriff⁺ auf z_1 über L

gdw

z_1, z_2 sind Dialogakte über L und entweder (a) z_2 ist Angriff auf z_1 von L oder (b) der Satz von z_1 ist $\bigwedge \xi_j^?$ und $z_2 = (n, \xi_j^?, z_1^? 1)$ für $\xi_j \in PAR$ und $n \geq 1$.

(2) z_3 ist Verteidigung⁺ von z_1 gegen z_2 über L

gdw

z_2 ist Angriff⁺ auf z_1 und entweder (a) z_3 ist Verteidigung von z_1 gegen z_2 von L oder (b) die Sätze von z_1 und z_2 sind $\bigwedge \xi_j^?$ bzw. $\xi_j^?$ und $z_3 = (m, \xi_j^? [\xi_j^?], z_1^? 1, z_2^? 1)$ oder

(c) die Sätze von z_1 und z_2 sind $\bigvee \{ \psi \}$ bzw. $?$ und $z_3 = (m, \Psi[\vartheta_j / \vartheta], z_1', z_2', 1)$ für $m \geq 1$ und $\vartheta_j \in \text{PAR}$

(Df26) D ist formaler k^* -Dialog über L für ϕ

gdw

[wie (Df2), (Df3), (Df4) mit 'Angriff⁺' für 'Angriff' und 'Verteidigung⁺' für 'Verteidigung']

(Df27) D ist formal gewonnener k^* -Dialog über L für ϕ

gdw

(a) D ist formaler k^* -Dialog über L

(b) für ein $m < n$, $\alpha \in \text{el}^+(L)$ ist $D'_m = \alpha!$, $D'_n = \|\alpha!$

(Df28) T ist formale k^* -Gewinnstrategie über L für ϕ

gdw

[wie (Df7), mit 'formal gewonnene k^* -Dialoge über L' für ' k^* -Dialoge in L' und mit neuem

(cb) $p = \bigwedge \{ \psi \}$ und X hat den Nf $(t; 1, (k+1, \vartheta_j?, k))$ für in a noch nicht aufgetauchtes $\vartheta_j \in \text{PAR}$

sowie neuem

(cd) $\|p = (k, ?, m)$, $a'_m = \bigvee \{ \psi \}$ und X hat den Nf $(t; 1, (k+1, \Psi[\vartheta_j / \vartheta], m, k))$ für in a noch nicht aufgetauchtes $\vartheta_j \in \text{PAR}$

und neuem

(cee) für $\Psi = \bigwedge \{ \psi \}$ $(t; 2, (k+1, \vartheta_j?, k))$ für in a neues $\vartheta_j \in \text{PAR}$]

(Df29) ϕ ist formal k^* -wahr über L

gdw

es gibt eine formale k^* -Gewinnstrategie über L für ϕ

Eine formale k^* -Gewinnstrategie über L ist also eine k^* -Strategie in L , die statt der unendlichen Verzweigungen jeweils nur noch einen Nf des Verzweigungspunktes mit "neuem" Parameter enthält sowie in jedem Quasiast eine Opp.-Verpflichtung $\neg!$ vor einer Prop.-Verpflichtung $\|\alpha!$. [1]

Das folgende Lemma bestimmt uns dazu, in unseren Untersuchungen der formalen Wahrheit die streng-konstruktiven Strategien auszuklammern:

(L25) Keine Aussage ϕ über L ist formal 3-wahr über L

(Beweis) Unmittelbar aus der Tatsache, daß nach (Df4) in einem 3-Dialog der Proponent auf den unmittelbar vorhergehenden Zug des Opponenten reagieren muß; es kann also keine 3-Strategie mit einem Quasiast D mit $\alpha!\|\$ vor $\|\alpha!$ geben, da der Dialog nach $\alpha!\|\$ abbricht.

Wir kommen nun zu den Äquivalenzbeweisen unserer formalen Dialogbegriffe mit einem üblichen Ableitungssystem. Hierzu definieren wir:

(Df30) B ist 1-Q-Ableitung über L für ϕ

gdw

[wie (Df8), mit ' $\text{ind}(L) \cup \text{PAR}$ ' für ' $\text{ind}(L)$ ' und neuem

$(V \Rightarrow) \quad (t, \Sigma \mid \bigvee \{ \psi \} \Rightarrow \Theta) \quad (\Rightarrow \wedge) \quad (t, \Sigma \Rightarrow \Theta \mid \bigwedge \{ \psi \})$

$(t; 1, \Sigma, \Psi[\mathfrak{c}_j / \cdot] \Rightarrow \Theta) \quad (t; 1, \Sigma \Rightarrow \Theta, \Psi[\mathfrak{g}_j / \cdot])$

für in $\Sigma \cup \Theta$ nicht vorkommendes $\mathfrak{c}_j \in \text{PAR}$

sowie zusätzlichem

(d) für alle Endpunkte $\Sigma \Rightarrow \Theta$ von B ist ein $\alpha \in \text{el}^+(L)$ in $\Sigma \cap \Theta$ enthalten.] [2]

(Df31) B ist 2-Q-Ableitung über L für ϕ

gdw

[wie (Df9), mit 'ind(L) ∪ PAR' für 'ind(L)' und neuem

$$\begin{aligned} (V:) \quad (t, \Sigma \vdash [V \setminus \Psi] : \phi) & \quad (\wedge) \quad (t, \Sigma : \Lambda \setminus \Psi) \\ (t; 1, \Sigma, \Psi \setminus \beta : \phi) & \quad (t; 1, \Sigma : \Psi \setminus \beta) \end{aligned}$$

für nicht in $\Sigma \cup \{\phi\}$ bzw. $\Sigma \cup \{\Lambda \setminus \Psi\}$ vorkommendes $\beta \in \text{PAR}$
sowie zusätzlichem

(d) für alle Endpunkte $\Sigma : \phi$ von B ist $\phi \in \text{el}^+(L) \cap \Sigma$.] [3]

(Df32) ϕ ist k*-Q-ableitbar über L

gdw

es gibt eine k*-Q-Ableitung über L für ϕ

(L26) Wenn ϕ formal 1-wahr über L ist, ist ϕ 1-Q-ableitbar über L

(Beweis) Wenn ϕ formal 1-wahr über L ist, gibt es eine formale

1-Gewinnstrategie für ϕ über L. Wir können (Df10)-(Df12),

(L3)-(L11), (Th1) völlig analog auf den formalen Fall

übertragen, wobei wir lediglich die Nf-Sequenten $(\ast v_1?, \parallel,$

$\ast v_2?, \parallel, \dots)$ bzw. $(\ast \Psi[v_1/\beta], \ast \Psi[v_2/\beta], \dots)$ und ihre Äqui-

valente $(\ast \Sigma \Rightarrow \odot, \Psi[v_1/\beta], \dots)$ bzw. $(\ast \Sigma, \Psi[v_1/\beta] \Rightarrow \odot, \dots)$

ersetzen durch $\ast \beta_j?, \parallel$ und $\ast \Sigma \Rightarrow \odot, \Psi[\beta_j/\beta]$ sowie $\ast \Psi[\beta_j/\beta], \parallel$ und

$\ast \Sigma, \Psi[\beta_j/\beta] \Rightarrow \odot$. Insbesondere werden im so resultierenden

$qb_n(T)$ und $qb(T)$ die neuen Parameter an genau denselben

Stellen eingeführt wie in T, sind also erst im aus $\ast \Sigma \Rightarrow \odot$

abgeleiteten Punkt $\ast \Sigma \Rightarrow \odot, \Psi[\beta_j/\beta]$ bzw. $\ast \Sigma, \Psi[\beta_j/\beta] \Rightarrow \odot$ ent-

halten und alle Ableitungsschritte entsprechen (Df30) für

auf T reduzierbares $qb(T)$. Da für den Opp.-Zug $\alpha!$ und

Prop.-Zug α ! in jedem Quasiast von T auch das verteidigte α und $\|\alpha$ sein muß, ist dann in jedem Endpunkt $\star \Sigma \Rightarrow \Theta$ von $qb(T)$ das α aus dem entsprechenden D in Σ und Θ enthalten und $qb(T)$ ist 1-Q-Ableitung für ϕ .

Bevor wir die andere Richtung der Äquivalenz der formalen 1-Wahrheit und der 1-Q-Ableitbarkeit beweisen, müssen wir die folgenden Begriffe einführen:

Wir ordnen eine 1-Q-Ableitung B für ein $\bigwedge \psi$ in der Weise, daß für den Anfang ohne (rep) von B

$$\star \emptyset \Rightarrow \{\bigwedge \psi\} \quad (\Rightarrow \bigwedge)$$

$$\star \emptyset \Rightarrow \{\bigwedge \psi, \psi[\varphi_j/\xi]\}$$

in B bei allen weiteren Anwendungen von $(\Rightarrow \bigwedge)$ auf $\bigwedge \psi$ in einem Punkt $x = \star \Sigma \Rightarrow \Theta[\bigwedge \psi]$ mit $Nf x_0 = \star \Sigma \Rightarrow \Theta, \psi[\varphi_m/\xi]$ mit neuem $\varphi_m \neq \varphi_j$ in x_0 φ_m durch φ_j ersetzt wird, ebenso wie im gesamten Teilbaum A_0 aus x_0 . Dadurch bleiben die Ableitungsregeln nach (Df30) gewahrt, so ist etwa das neue x_0 aus X nun durch (rep) ableitbar. Ebenso gibt es durch die gleichmäßige Veränderung der Elementaraussagen $\alpha[\varphi_m]$ zu $\alpha' = \alpha[\varphi_j/\varphi_m]$ für jeden Endpunkt $\star \Sigma[\alpha] \Rightarrow \Theta[\alpha]$ von A_0 nun den entsprechenden Endpunkt $\star \Sigma[\alpha'] \Rightarrow \Theta[\alpha']$ und das so entstandene B' ist 1-Q-Ableitung für $\bigwedge \psi$. Wir nennen ein solches B' eine reguläre 1-Q-Ableitung (Für $\phi \neq \bigwedge \psi$ sei jede 1-Q-Ableitung für ϕ regulär).

(L27) Wenn ϕ über L 1-Q-ableitbar ist, ist ϕ über L formal 1-wahr.

(Beweis) Wenn ϕ über L 1-Q-ableitbar ist, gibt es eine reguläre 1-Q-Ableitung für ϕ über L. Für diese können wir (Df13)-(Df15), (L11)-(L13), (Th2) auf den formalen Fall übertragen

analog (L26) mit folgender Veränderung in (Df13) (ae):

für $\Phi = \bigwedge \psi$ ist $ts_B(r)$ gleich

$$\bigwedge \psi$$

In (Df14) legen wir neu fest:

0?

Für B aus $\star \emptyset \Rightarrow \bigwedge \psi_0$ mit Nf $X' = \star \emptyset \Rightarrow \bigwedge \psi_0, \psi_0[\varrho_j/\lambda_j]\}$
ist $strat_1(B)$ gleich

$$\begin{array}{c} \bigwedge \psi_0 \\ \vdots \\ \varrho_j? \end{array}$$

mit $ts_B(\{X'\})$ aus $\psi[\varrho_j/\lambda_j]$ und Ankoppeln des Endteils A' ab X' an jeden Endpunkt von $ts_B(\{X'\})$. Für $\psi_0[\varrho_j/\lambda_j] = \bigwedge \Delta_0$ wird in $ts_B(\{X'\})$ 0 durch den ersten Parameter ϱ_{k_0} ersetzt, der nicht in B vorkommt.

In $strat_{n+1}(B)$ wird in den Fällen (a) in jedem $ts_B(\{X\})$ mit $X = \star \Sigma \Rightarrow \Theta, \bigwedge \psi$ 0? durch $\varrho_k?$ ersetzt mit dem ersten ϱ_k , das weder in $strat_n(B)$ noch in B vorkommt.

Ferner setzen wir (Df14) (ac) neu:

falls $s=(X)$ nach $(\Rightarrow \bigwedge)$ inferiert wurde mit $\bigwedge \psi \in \Theta$, $X = \star \Sigma \Rightarrow \Theta, \psi[\varrho_1/\lambda_1]$, wird X durch

$$\begin{array}{c} \bigwedge \psi \\ \vdots \\ \varrho_1? \\ \vdots \\ ts_B(\{X\}) \end{array}$$

ersetzt und der Endteil ab X an jeden Endpunkt von $ts_B(\{X\})$ angekoppelt.

Durch diesen Mechanismus erreichen wir folgendes:

Angenommen, in B kommen mehrere Anwendungen von $(\Rightarrow \wedge)$ auf dasselbe $\wedge \psi$ in einem Ast a vor, so wird dabei in B jeweils ein neuer Parameter $\mathcal{G}_i$ im so entstehenden $X = \sum \Rightarrow \Theta, \psi[\mathcal{G}_i / \psi]$ eingeführt. Wir können dann in $\text{strat}(B)$ den aus X entstehenden Ursprung $\star \psi[\mathcal{G}_i / \psi]$ von $\text{ts}_B(\psi X)$ nicht mehr als Verteidigung der Prop.-Aussage $\|\wedge \psi$ in dem a entsprechenden Quasiast D von $\text{strat}(B)$ interpretieren, da in D auf $\|\wedge \psi$ nur ein einziger Angriff $\mathcal{G}_j?$ folgen kann. Da die reguläre 1-Q-Ableitung B nicht für $\wedge \psi$ sein kann, weil dann solche Ableitungen nicht mehrmals vorkämen, tritt in D $\|\wedge \psi$ als Prop.-Angriff oder als Prop.-Verteidigung auf. Dann können wir diesen Angriff bzw. diese Verteidigung wiederholen wie oben vor $\psi[\mathcal{G}_i / \psi]$ mit jetzt neuem Opp.-Angriff $\mathcal{G}_i?$ auf $\|\wedge \psi$. Die Regelung der Angriffe $\mathcal{G}_k?$ nach neu aufgetauchtem $\|\wedge \Delta$ stellt sicher, daß hierbei $\mathcal{G}_i$ neu in D ist. $\text{strat}(B)$ ist dann ein Baum mit allen Schritten und Verzweigungen gemäß (Df28) und ist analog (Th2) auf B reduzierbar₂.

Da $\text{strat}(B)$ in jedem Quasiast D eine Opp.-Aussage α mit $\alpha \in \sum$ und angegriffene Prop.-Aussage $\|\alpha$ mit $\alpha \in \Theta$ für den entsprechenden Endpunkt $\star \sum \Rightarrow \Theta$ von B enthält, kann jeder Ast a erweitert werden um

$$\alpha! \left\| \begin{array}{l} ? \\ \alpha! \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (\text{Angriff auf } \alpha) \\ (\text{Verteidigung von } \|\alpha) \end{array}$$

mit den entsprechenden Numerierungen und das so erweiterte $\text{strat}(B)$ ist formale 1-Gewinnstrategie über L für ϕ .

(Th6) ϕ ist formal 1-wahr über L

gdw

ϕ ist 1-Q-ableitbar über L

(Beweis) Aus (L26), (L27).

Es folgt

(L28) Wenn ϕ formal 2-wahr ist über L, ist ϕ 2-Q-ableitbar über L.

(Beweis) Analog (L26) aus (Th3).

(L29) Wenn ϕ über L 2-Q-ableitbar ist, ist ϕ über L formal 2-wahr.

(Beweis) Analog (L27) mit dem Unterschied, daß wir eine 2-Q-

Ableitung B für ϕ nicht "regularisieren" müssen. Da B

2-Q-Ableitung mit Endpunkten $\star \Sigma : \alpha$ ist, wird jedes $\bigwedge \{ \psi \}$

in einem Punkt $\star \Sigma : \bigwedge \{ \psi \}$ in einem Ast a von B durch An-

wendung von $(:\bigwedge)$ in a eliminiert und zu $\star \Sigma' : \psi [\xi_j / \xi]$

mit neuem ξ_j umgewandelt. Wir können bei der Transformie-

rung des Punktes $X = \star \Sigma : \bigwedge \{ \psi \}$ in $\text{strat}'_n(B)$ $\text{ts}_B(\{x\})$ fest-

legen als

$$\xi_j ? \parallel \bigwedge \{ \psi \}$$

für dieses notwendig später eingeführte ξ_j .

Dadurch, daß man in B $(:\bigwedge)$ jeweils nur einmal auf die-
selbe Aussage $\bigwedge \{ \psi \}$ anwenden kann ohne daß sie (z.B. durch
Anwendung von $(\neg :)$) neu auf der rechten Seite erscheint

und dann in einem $\text{strat}'_m(B)$ als $\parallel \bigwedge \{ \psi \}$ mit neuem $\xi_k ?$ an-
gegriffen wird, ist $\psi [\xi_j / \xi]$ bei der Umwandlung in einem

$\text{strat}'_i(B)$ zu $\parallel \psi [\xi_j / \xi]$ im Gegensatz zum klassischen Fall

immer Verteidigung gegen den letzten Angriff $\xi_j ?$ auf $\bigwedge \{ \psi \}$.

(Th7) Φ ist formal 2-wahr über L

gdw

$\neg$ ist 2-Q-ableitbar über L

(Beweis) Aus (L28), (L29)

Es gilt nun :

(L30) Φ ist 1-Q-ableitbar in L

gdw

Φ ist semantisch wahr bzgl. aller Situationen S mit $S'1=L$

(Beweis) Dieser Satz drückt lediglich die übliche Adäquatheit
des klassischen Kalküls der 1-Q-Ableitungen für die Sprache
1.Stufe L aus. ^[+]

(Th8) Φ ist formal 1-wahr über L

gdw

Φ ist bzgl. allen Sprachsituationen S mit $S'1=L$ material
1-wahr.

(Beweis) Aus (L30), (Th5).

Wir wollen dieses Theorem den Beweis der materialen
Adäquatheit der formalen 1-Gewinnstrategien nennen. Die Richtung
von oben nach unten, die materiale Korrektheit dieser Strategien,
erhält im DK eine Interpretation, die wir folgendermaßen rekon-
struieren können:

Eine formale 1-Gewinnstrategie stellt als finites Gebilde
ein abstraktes Modell einer in einer Praxis P_f konkret reali-
sierbaren Entität dar, die wir uns (wie eine finite materiale

Gewinnstrategie, vgl. S. 61) etwa als Tafel vorstellen können, anhand der der Proponent in einem materialen Dialogspiel auf jeden Fall zu einem formal gewonnenen materialen Dialog D um ein Φ kommen kann. Hierzu muß er lediglich bei einem Angriff $v_j!$ oder einer Verteidigung $\Psi[v_j/\xi]$ gegen $\|\alpha\|$ des Opponenten den betreffenden neuen Parameter ξ_k in der Tafel als Stellenhalter für v_j interpretieren und entsprechend im Dialog fortfahren können. Jeder formal gewonnene materiale Dialog D in L ist aber bzgl. jeder Situation (L, R) gewonnen, da für die Züge $\dots, \alpha!, \dots, \|\alpha!\|, \dots$ in D α entweder elementar verteidigbar ist bzgl. S , womit $\|\alpha!\|$ einlösbar ist, oder nicht, womit $\alpha!$ nicht einlösbar ist.

Darüber hinaus wird aber postuliert, daß der Proponent jede Elementarverteidigung des Opponenten grundsätzlich nachmachen kann (was wir als Anforderung an P_f interpretieren können), so daß er sicher sein kann, daß entweder der Opponent sein vorhergehendes $\|\alpha!\|$ nicht einlösen kann oder daß er selbst durch Imitation der Verteidigung von α sein eigenes $\alpha!$ einzulösen in der Lage ist und damit den Dialog auf jeden Fall praktisch gewinnt, wie man sagen könnte. Wir wollen dies als die praktische materiale Korrektheit der formalen 1-Gewinnstrategien bezeichnen, wobei wir uns klar sind, daß dieser Begriff aufgrund seiner notwendigerweise intuitiven Komponenten den formalen Rahmen der bisherigen Arbeit verläßt.

Die Richtung von unten nach oben von (Th8), die materiale Vollständigkeit der formalen 1-Gewinnstrategien, läßt sich als Demonstration auffassen, daß diese Strategien eine unter

diesem Aspekt optimale Methode darstellen, um möglichst viele materiale Dialoge garantiert bzgl. jeder Situation S zu gewinnen.

Eine praktische materiale Vollständigkeit ist wohl kaum in dem dem relativ plausiblen Sinn der praktischen materialen Korrektheit herzustellen, da bereits der Begriff "material wahr bzgl. S" nicht allgemein operationalisierbar ist. .

Interessant ist nun angesichts (Th8) die Frage nach der materialen Adäquatheit der formalen 2-Gewinnstrategien. Zwar können wir angesichts der offensichtlichen Tatsache, daß auch über L alle formal gewonnenen 2-Dialoge formal gewonnene 1-Dialoge sind, feststellen:

(L31) ϕ ist formal 2-wahr über L

$\supset$

ϕ ist formal 1-wahr über L

und daraus die materiale Korrektheit ableiten:

(L32) ϕ ist formal 2-wahr über L

$\supset$

ϕ ist bzgl. allen Situationen S material 2-wahr mit $L=S^6_1$

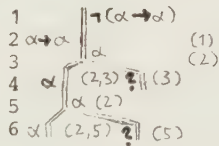
(Beweis) Aus (L31), (Th5)

(Auch hierfür können wir analog zum klassischen Fall die praktische materiale Korrektheit postulieren)

Es ist jedoch aufgrund der schwächeren intuitionistischen Logik (Z.B. für nicht formal 2-wahres, aber nach (Th5) bzgl.

jeder Situation material 2-wahres $\neg \vee \alpha$) die materiale Vollständigkeit nicht gegeben. Es läßt sich allerdings eine Abwandlung des Begriffs der materialen Wahrheit angeben (siehe Anhang), der die materiale Adäquatheit der formalen k^* -Wahrheit für den klassischen und den intuitionistischen Fall sicherstellt.

[1] Diese Version der formalen k^* -Wahrheit impliziert auch die Notwendigkeit der Existenz von Angriffen auf Dialogakte, deren Sätze Elementaraussagen sind. Angenommen, es gäbe sie nicht und der formal gewonnene k^* -Dialog müßte dafür nur ein α vor $\|\alpha$ aufweisen mit elementarem α . Dann würde etwa in der folgenden 1-Strategie T^* in L mit der Elementaraussage α von L



der jeweils rechte Ast jeder Verzweigung ausfallen und T^* wäre formale 1-Gewinnstrategie über L für formal 1-wahres $\neg(\alpha \rightarrow \alpha)$ (übrigens auch 2-wahres) über L unter Verlust von (Th6).

Die Elementarverpflichtungen wiederum sind für die Äquivalenzbeweise von großem Nutzen (vgl. S. 82), da sie bei der Anwendung des Dialogkalküls dieselbe Flexibilität bzgl. der Reihenfolge der Elementaraussagen erlauben wie die Smullyan-kalküle, ohne die praktische materiale Korrektheit der formalen Wahrheit zu gefährden (s. S. 85); was auch praktische Vorteile in der Benutzung der Gewinnstrategien bringt. Nebenbei bemerkt, tauchen ähnliche Konstrukte z.B. in [Lorenzen/Schwemmer] in den Beispielen ohne technische Einführung auf und werden im DK auch systematisch gebraucht.

[2] Der Kalkül $\mathcal{K}_1^{\infty}$ von Smullyan (quantorenlogisch erweitert) mit atomarem Abschluß (vgl. [1], S. 58)

[3] Dies ist die vollformale Version des Kalküls von Dummet mit atomarem Abschluß (vgl. [2], S. 58)

[4] In unserem System gilt diese Adäquatheit allerdings nur für L mit unendlich vielen Individuenkonstanten (vgl. S. 136; die analoge Argumentation läßt sich für das bzgl. $(L_0, \{(\pi_1, 1), (\pi_2, 1)\})$ semantisch wahre Φ_0 durchführen).

TEIL II: MATERIALE UND FORMALE LOGIK IM WISSENSCHAFTSAUFBAU
DES DEUTSCHEN KONSTRUKTIVISMUS

(II1) Das Beispiel der Protoarithmetik

Beim Aufbau der Wissenschaften im DK stehen 2 Begriffe im Vordergrund: Der der Rechtfertigung einer wissenschaftlichen Theorie und der der Begründung. Der erstere wird meist in einem relativ klaren und einfachen Sinn gebraucht: eine Theorie, einmal begründet, ist dann gerechtfertigt, wenn die Erfahrung über ihre Anwendung in der Praxis ihren Nutzen ausweist. Wir können vorbehaltlich ihrer konstruktiven Begründung dann sicher z.B. die Arithmetik als gerechtfertigt ansehen. Es erübrigt sich zu sagen, daß im Wissenschaftsaufbau nur solche begründeten und gerechtfertigten Theorien zugelassen werden sollen.

Der problematischere Begriff ist der der Begründung. In der Tat kann dies als das zentrale Anliegen des DK bezeichnet werden: wie gelangt man über das als unbefriedigend empfundene formallogisch deduktive Verfahren axiomatischer Theorien hinaus und gewinnt die Begründung der ersten Sätze einer Theorie (z.B. der Peano-Axiome in der Arithmetik)?

Im Lösungsversuch dieses Problems kommt die materiale und darauf aufbauend die formale Logik zum Tragen. Eng damit zusammenhängend ist eine von der üblichen Tarski-Semantik abweichende Behandlung der Allquantoren.

Die Kontexte, in der die materiale Logik ihre begründende Rolle spielt, sind - wie in Teil I angedeutet - normierte,

konkret realisierbare Dialogpraxen. Wir werden hierfür zunächst ein Beispiel geben, das der sogenannten Protoarithmetik, an dem wir die betreffenden Mechanismen demonstrieren werden. Hierbei halten wir uns in einer mehr intuitiven Darstellung, die keinesfalls mit den formalen Definitionen in Teil I verglichen werden darf, möglichst eng an die entsprechenden Ausführungen im DK (im Wesentlichen an [Lorenzen/Schwemmer]).

Sei nun P^* die Praxis der Protoarithmetik. P^* enthält folgende konkret realisierbare Komponenten (die fettgeschriebenen Zeichen sind analog Teil I Namen für die entsprechenden konkreten objektsprachlichen Zeichen, etwa von Kreidezeichen auf einer Tafel o.ä.):

- (a) abzählbar unendlich viele Individuenkonstanten aus P^* , nämlich die Zählzeichen $I, II, III, \dots$
- (b) die Prädikatkonstanten S und $<$ aus P^* ; ferner die Kopula $\&$ und das Komma $,$.
- (c) die aus (a) und (b) generierten Elementaraussagen aus $P^{*[1]}$, nämlich alle α der Form $\vee, \mu \in S, \vee S_\mu$ und $\vee <_\mu$ für die Individuenkonstanten $\vee$ und μ aus P^* .
- (d) die abzählbar ^{unendlich} vielen Individuenvariablen aus P^* : $n, m, k, i, n_1, m_1, \dots$
- (e) die logischen Zeichen $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \wedge, \vee$, ferner $($ und $)$.
- (f) die aus (c), (d) und (e) gebildeten Aussagen aus P^* , z.B. $\wedge n (1 < n)$
- (g) die Bezweiflungen $?, 1?, 2?, \vee?$ aus P^* sowie die Elementarverpflichtungen $\alpha!$ aus P^* für α aus (c).
- (h) die arabischen Numerae $1, 2, 3, \dots$ zur Numerierung von Dialogzügen und der Doppelstrich $||$.

- (i) die aus (f), (g) und (h) generierten materialen 2-Dialoge aus $P^*[2]$, z.B.

1		S ^ <	
2	12		(1)
3		S	(1, 2)
4	2		(3)
5		S !	(3, 4)

In P^* sind folgende Elementarverteidigungen festgelegt:

- (evS) Eine Elementaraussage $v, \mu \in S$ und $v S \mu$ (v ist der Nachfolger von μ) wird genau dadurch elementar verteidigt, daß zuerst v, μ angeschrieben und dann solange links und rechts gleichzeitig je einmal | gestrichen wird, bis genau |, dasteht. So wird etwa || S || elementar verteidigt durch

||, ||
||, |
|,

- (ev<) Eine Elementaraussage $v < \mu$ wird genau dadurch verteidigt, daß zunächst , < angeschrieben wird für ein Zählzeichen < und so lange rechts und links je einmal | hinzugefügt wird, bis v, \mu dasteht. So wird || < |||| verteidigt durch

, ||
|, |||
||, ||||

Ein materialer 2-Dialog D aus P^* ist praktisch gewonnen aus P^* gdw der Opponent für eine Elementarverpflichtung $\alpha^!$ in D α nicht gemäß $(ev\bar{\mathcal{S}})$ oder $(ev\mathcal{L})$ verteidigen kann oder der Proponent eine Elementarverteidigung nach diesen Regeln für ein α mit $\|\alpha^!$ in D vorbringen kann.

(Eine explizite Erweiterung von P^* um die formale Logik werden wir nicht vornehmen.)

Welche Rolle spielen nun in P^* die materialen Dialoge, auf die eine begründende Funktion dieser Dialoge aufbauen könnte? Kurz gesagt, verleihen sie mit ihrem Sprachspiel den quantorenlogisch komplexen Aussagen in P^* Bedeutung, und zwar auf der Basis der Bedeutung der Elementaraussagen in P^* .

Wenn wir "Bedeutung" nicht von vornherein im Sinne einer Tarski-Semantik verstehen, so können wir wohl ohne weiteres sagen, daß in P^* die Bedeutung einer Elementaraussage α durch die Elementarverteidigungen von α festgelegt wird. Folgende zwei Arbeitshypothesen dürften plausibel sein:

- (H1) Bedeutungsgleiche Elementaraussagen haben alle Elementarverteidigungen gemeinsam.
- (H2) Bedeutungsverschiedene Elementaraussagen haben mindestens eine Elementarverteidigung nicht gemeinsam.

Aus (H1) und (H2) folgt unmittelbar, daß Elementaraussagen α und β bedeutungsgleich sind gdw sie die gleichen Elementarverteidigungen haben. So sind etwa die "alternativen Schreibweisen" $\forall S_{\mu}$ und $\forall_{\mu} S$ aufgrund (H1), (H2) als bedeutungsgleich ausgewiesen.

(Eine etwas problematischere Folgerung aus diesen Hypothesen ist es allerdings, daß alle nicht verteidigbaren Elementaraussagen bedeutungsgleich sind; so ist etwa nach (H1), (H2) $\|S\|$ bedeutungsgleich mit $\| \langle \rangle \|$. Eine tiefere Diskussion dieser intuitiv doch anormal erscheinenden Tatsache würde uns jedoch zu weit vom Thema abführen.)

Sei S^* die Situation mit der durch (a), (b) determinierten Sprache L^* und S^{*2} gleich der Menge derjenigen (α, e) , so daß α Elementaraussage aus P^* und e Elementarverteidigung von α gemäß (evS) bzw. $(ev\langle \rangle)$ ist. Dann können wir die materiale 2-Wahrheit bzgl. S^* einer Elementaraussage α aus P^* darstellen als Funktion seiner Elementarverteidigungen, d.h. seiner Bedeutung, da die einzige 2-Strategie T_0 in L^* für α

$$\begin{array}{c|c} 1 & \alpha \\ 2 & ? \\ 3 & \alpha! \end{array} \quad \begin{array}{c} (1) \\ (1,2) \end{array}$$

genau dadurch zur materialen 2-Gewinnstrategie für α bzgl. S^* wird, daß α elementar verteidigbar ist bzgl. S^* .

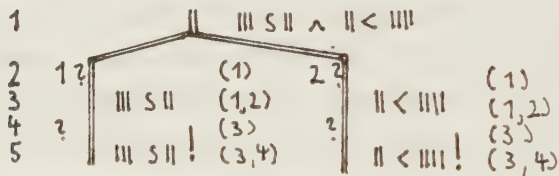
Wenn wir uns nun fragen, ob wir für elementares α aus P^* die materiale 2-Wahrheit von α bzgl. S^* in P^* selbst darstellen können, so müssen wir zunächst präzisieren:

Eine Eigenschaft auf P^* sei eine Menge von Komponenten von P^* (gemäß (a)-(i)). Eine Eigenschaft E über P^* sei praktisch determiniert aus P^* durch V gdw V ist ein praktisches Verfahren ^[3] in P^* (z.B. (evS)), so daß V genau die Elemente von E auszeichnet (im Falle $V=(evS)$ wäre z.B. die Eigenschaft $\{\alpha: \alpha = v \mid S \vee$ oder $\alpha = v \mid, v \in S\}$ praktisch determiniert aus P^* durch V).

Offensichtlich wird in diesem Sinne die Menge der material 2-wahren Elementaraussagen $\propto$ bzgl. S^* aus P^* praktisch determiniert durch (evS) und $(ev\zeta)$.

Für die Menge M_j der material 2-wahren junktorenlogischen Aussagen bzgl. S^* steht uns in P^* kein Verfahren zur Verfügung, das M_j aus P^* praktisch determinieren würde. Wir können jedoch P^* erweitern um

- (k) die aus (i) generierten junktorenlogischen materialen 2-Strategien_j aus P^* , z.B. T_0 gleich



sowie um das Verfahren

- (V_j) Es bestehe in P^* das folgende Verfahren: Man gibt eine materiale 2-Strategie_j T aus P^* für ein junktorenlogisches ϕ aus P^* an und gewinnt alle Äste von T praktisch, z.B. für ϕ gleich $III S II \wedge II < III$ durch die Angabe von T_0 und Elementarverteidigung von $III S II$ und $II < III$ nach (evS) bzw. $(ev\zeta)$.

Es ist dann M_j durch V_j praktisch determiniert aus P^* . Wir können nun weiter gehen und in P^* einführen:

- (l) Namen ' ϕ ' für junktorenlogische Aussagen ϕ aus P^* gemäß (f), z.B. ' $III S II \wedge II < III$ ' (wir beschränken den Begriff der Individuenkonstanten aus P^* weiterhin auf Zählzeichen

aus (a), ebenso seien (Elementar-) Aussagen, materiale Dialoge etc. aus P^* nur die bisher eingeführten). Es werde ferner die Zuordnung von ϕ zu $|\phi|$ durch ein praktisches Verfahren aus P^* erreicht (z.B. das Anschreiben von ϕ und Anfügen der Anführungszeichen).

(m) die Prädikatkonstante' aus P^* M_w mit den entsprechenden Elementaraussagen' $|\phi| \in M_w$

$(\forall M_w) |\phi| \in M_w$ wird genau durch auf ϕ angewendetes V_j elementar verteidigt'.

Allgemein sagen wir: Eine Eigenschaft E über P^* wird aus P^* repräsentiert durch Π gdw Π Prädikatkonstante' aus P^* ist, jedes $o \in E$ einen Namen $\text{nom}(o)$ aus P^* hat, der ihm durch ein praktisches Verfahren in P^* zugeordnet wird und $\text{nom}(o) \in \Pi$ in P^* elementar verteidigbar' ist gdw $o \in E$.

Nach dieser Definition ist die Menge der bzgl. S^* material 2-wahren junktorenlogischen Aussagen ϕ aus P^* durch M_w repräsentiert. Es ist anzumerken, daß die Repräsentation dieses Begriffs der junktorenlogischen materialen 2-Wahrheit aus P^* unabhängig ist von den spezifischen Elementarverteidigungen in P^* (im Unterschied etwa von der anschließend vorgenommenen Begründung der Peano-Axiome aus P^*).

Zwar wäre es nun möglich, aufgrund der besonderen Struktur der Elementarverteidigungen aus P^* Spekulationen anzustellen über eine Erweiterung von M_w bis zu dem Punkt, wo u.U. die Menge M_q der quantorenlogisch material 2-wahren Aussagen aus P^*

repräsentierbar wäre aus P^* . Dafür fehlt uns jedoch bereits von vorneherein eine präzise Explizitdefinition des "praktischen Verfahrens" (s.u.S.103), der an diesem Punkt benötigt würde, weil ein solches Programm weit über die Ausführungen im DK hinaus greift; vor allem aber wollen wir an P^* nur verallgemeinerbare Begriffe demonstrieren, wie etwa den der Repräsentation.

Es ist aber grundsätzlich klar, daß ohne einen umfangreichen Rückgriff auf das System der Elementarverteidigungen und ohne seine Widerspiegelung in P^* (etwa durch Aufnahme der gesamten Rekursionstheorie) M_q in keiner Erweiterung von P^* repräsentierbar ist. Die spezifische Leistung der materialen Logik besteht nun darin, daß sie lediglich durch die Einführung der Dialoge die Bedeutung der Allsätze aus P^* in P^* selbst "festmacht".

Die Bedeutungen, die bisher die elementaren und junktorenlogischen Aussagen ϕ aus P^* erhielten, konnten im Wesentlichen auf die Bedeutung von $\phi^1 \in M_w$, also auf die betreffenden Elementarverteidigungen' zurückgeführt werden; dies war auch für die junktorenlogischen Aussagen möglich, so daß für sie das System der materialen Dialoge keinen über eine Art Verifikationsbegriff hinausgehenden Bedeutungsbegriff erzwang: Bedeutung von ϕ gleich der Methode der Verifikation von ϕ .

Für die quantorenlogischen Aussagen $\bigwedge \phi$ hingegen ist die Bedeutung zunächst nicht von ihrem Lokus im Sprachspiel der materialen Dialoge abstrahierbar: Wir müssen in einer meaning-as-use-Auffassung ihre Bedeutung gleichsetzen mit oder als Funktion ansehen von ihrem Platz in den Regeln der materialen Dialoge

bzw. der dadurch determinierten Entitäten oder Handlungen aus P^* , d.h. der möglichen Angriffe $\neg$ und der Verteidigungen $\phi [v/\lambda]$.

Einer der Hauptvorteile, den die Vertreter des DK in dieser Art von Bedeutungsfestlegung sehen, ist die Vermeidung der von ihnen angeprangerten üblichen Tarski-Semantiken. Eine Definition wie " $\bigwedge \lambda \phi$ ist wahr gdw alle Einsetzungen wahr sind" wird als zirkulär betrachtet in dem Sinne, daß dabei in der Metasprache durch die Verwendung des "alle" die doch erst festzusetzende Bedeutung des Allquantors als schon bekannt vorausgesetzt wird. (Eine Formulierung der Art " $\alpha \wedge \beta$ ist beweisbar gdw α ist beweisbar und β ist beweisbar" wird hingegen als unproblematisch angesehen, da sie, um in unserer Terminologie zu bleiben, in ein praktisches Verfahren zur Verteidigung der Beweisbarkeit von $\alpha \wedge \beta$ überführbar ist.)

Wenn wir nun zu der Frage zurückkehren, wie die Begründung der ersten Sätze einer deduktiven Theorie in einer Praxis wie unserem P^* allgemein beschreibbar ist, so ist es zunächst als eine der Merkwürdigkeiten des DK anzusehen, daß keine zentrale, paradigmatische Explizitdefinition des Begriffs der Begründung besteht, auf die die Vertreter des DK sich stützen oder die sie diskutieren (wenn man vom Bereich der Arithmetik und manchmal auch der Logik absieht, wo "begründet" oft im Spezialsinn von "intuitionistischen Prinzipien entsprechend" zu verstehen ist).

Wir sind deshalb gezwungen, eine eigene solche Explizitdefinition anzugeben, die möglichst Vielem vom Gedankengut des DK gerecht wird und sie zur Diskussion zu stellen.

Unser Vorschlag ist folgender: es soll jede Aussage ϕ aus einer Praxis P wie unser P^* als k^* -begründet aus P gelten gdw es ein praktisches Verfahren V in P gibt, so daß nach V jedes materiale k^* -Dialogspiel aus P um ϕ gewonnen werden kann.

Es ist dann natürlich etwa in P^* jedes ϕ mit elementar verteidigbarem ' ϕ ' $\in M_w$ 2-begründet, da sich die "Taktik" V des Proponenten in einem Dialog um ϕ aus der Elementarverteidigung' von ' ϕ ' $\in M_w$ ergibt. Eine weitere Klasse von begründeten Aussagen aus P^* sind die logisch 2-wahren Aussagen über L^* aus P^* . Dies ergibt sich aus der praktischen materialen Korrektheit der formalen Logik (wenn wir, wie schon angedeutet, das Nachahmen einer Opp.-Elementarverteidigung plausiblerweise als Teil eines praktischen Verfahrens akzeptieren).

Interessant wird nun diese Festlegung, wenn wir sie auf die Begründung der Peano-Axiome aus P^* anwenden, wie sie im DK vorexerziert wird. Die Axiome haben in P^* die Form:

$$(P1) \bigwedge_n \bigwedge_m (nSm \rightarrow 1 < n)$$

$$(P2) \bigwedge_m \bigwedge_n \bigwedge_k \bigwedge_i ((kSm \wedge iSn) \wedge m < n \rightarrow k < i)$$

$$(P3) \bigwedge_n \neg (n < 1)$$

$$(P4) \bigwedge_m \bigwedge_n \bigwedge_k \bigwedge_i ((kSm \wedge iSn) \wedge k < i \rightarrow m < n)$$

und alle Instanzen des Schemas:

$$(P'5) \phi^*[1] \wedge \bigwedge_m \bigwedge_k (\pm^*[m] \wedge kSm \rightarrow \phi^*[k/m]) \rightarrow \rightarrow \bigwedge_n (\phi^*[n])$$

Es läßt sich nun in P^* für (P1)-(P4) ein praktisches Verfahren angeben, nach dem ein materialer 2-Dialog um diese Sätze

auf jeden Fall gewinnbar ist; ebenso wie für (P'5) ein Verfahren, nach dem ein materialer 2-Dialog um jede Instanz gewinnbar ist. Wir geben dieses Verfahren für (P2) explizit an:

Der Proponent verfähre in einem Dialogspiel um (P2) nach folgendem Schema: Angenommen, die notwendigen Anfangsangriffe des Opponenten seien nacheinander $\mu?$, $\nu?$, $\kappa?$, $\iota?$, so daß in Zug 9 der Proponent fortfahren kann :

9		$(\kappa S_{\mu} \wedge \iota S_{\nu}) \wedge \mu < \nu \rightarrow \kappa < \iota$	(7,8)
10	$(\kappa S_{\mu} \wedge \iota S_{\nu}) \wedge \mu < \nu$		(9)
11		1?	(10)
12	$\kappa S_{\mu} \wedge \iota S_{\nu}$		(10,11)
13		1?	(12)
14	κS_{μ}		(12,13)
15		2?	(12)
16	ιS_{ν}		(12,15)
17		2?	(10)
18	$\mu < \nu$		(10,17)
19		$\kappa < \iota$	(9,10)
20		?	(19)

Nun zwingt der Proponent durch Angriffe auf 14,16 und 18 dem Opp. die Verpflichtungen $\kappa S_{\mu}!$, $\iota S_{\nu}!$ und $\mu < \nu!$ auf und verteidige dann 19 durch $\kappa < \iota!$. Angenommen, der Opponent kann κS_{μ} , ιS_{ν} und $\mu < \nu$ elementar verteidigen, so hat κ die Form $\mu!$ und ι die Form $\nu!$ und der Proponent muß die Elementarverteidigung von $\mu < \nu$ (die nach (ev<) mit μ, ν endet) nur übernehmen und um $\mu!, \nu!$ ergänzen, um seine eigene Elementarverpflichtung einzulösen.

Ähnliche Verfahren gibt es für (P1), (P3) und (P4) (der Leser wird sie nach dem obigen Beispiel unschwer selbst ergänzen können). Für alle Instanzen Δ_i von (P'5) gibt es ein einziges Verfahren V' , nach dem alle materialen 2-Dialoge D' um Δ_i aus P^* gewonnen werden können. Wir gehen auf dieses etwas komplizier-

tere Schema mit den dazugehörigen Beweisen nicht näher ein und merken nur an, daß es je nach der äußeren Gestalt von Λ_1 eine spezifische Art der Dialogführung vorschreibt. (P1)-(P4) und alle Instanzen von (P'5) sind also 2-begründet aus P*.

Wenn wir auf das Verfahren für (P2) näher eingehen, so sehen wir, daß die Existenz eines solchen Verfahrens wesentlich hinausgeht über das bloße Vorhandensein einer materialen 2-Gewinnstrategie für (P2).

Zum ersten ist daraus die richtige Dialogführung für den Proponenten endlich geregelt. Wenn wir z.B. eine nicht allgemein für jedes $\alpha^*[v/\xi]$ entscheidbare Elementaraussageform α^* annehmen, so existiert zwar objektiv gegenüber jedem Opponenten eine materiale 2-Gewinnstrategie für $\Lambda_n(\alpha^*[n] \vee \neg \alpha^*[n])$, da für jeden Angriff $v?||$ der Opponent entweder $\alpha^*[v/n]$ nicht verteidigen kann (worauf für den Opp.-Angriff $?||$ auf die Prop.-verteidigung $||\alpha^*[v/n] \vee \neg \alpha^*[v/n]$ dem Opp. über die Verteidigung $||\neg \alpha^*[v/n]$ die von ihm nicht einlösbare Elementarverpflichtung $\alpha^*[v/n]!!$ aufgezwungen werden kann), oder der Opp. kann $\alpha^*[v/n]$ verteidigen, so daß auch der Prop. mit derselben Elementarverteidigung über $||\alpha^*[v/n]$ zum praktischen Dialoggewinn käme. Im Falle des Verfahrens für (P2) ist der praktisch gewinnbare Dialog dagegen eindeutig für jede Einsetzung festgelegt.

Zweitens besteht aber, wieder im Unterschied zum vorigen Beispiel, eine Handlungsvorschrift für den Proponenten in dem Verfahren für (P2), mittels der er auch beim Einlösen aller Opp.-Verpflichtungen seine eigene erfolgreich einlösen kann.

Zur Repräsentierbarkeit der Menge M_b der begründeten Aussagen aus P^* gelten die obigen Überlegungen zu M_q und M_w analog. Wir untersuchen diese Frage deshalb nicht weiter und stellen lediglich fest, daß eine solche Repräsentierung, etwa durch einen Prädikator Bgd wesentlich abhängig ist von dem System der Elementarverteidigungen in der betreffenden Praxis. Eine weitere Schwierigkeit ist dabei die Tatsache, daß angesichts der zentralen Rolle des Begriffs des praktischen Verfahrens in der Definition der Begründung einer Aussage α aus P dieser Begriff in den Regeln zur Elementarverteidigung von $\text{nom}(\alpha) \in Bgd$ wiedergespiegelt werden müßte; dazu wäre aber zunächst eine Präzisierung nötig. Die Diskussion der Problematik etwa einer Explizitdefinition des Prädikats "ist ein praktisches Verfahren" verschieben wir auf den Anfang des nächsten Kapitels.

[1] In [Lorenzen/Schwemmer], S.188 wird Wert gelegt auf die Unterscheidung von Elementar- und Primaussagen. Der Unterschied scheint, intuitiv gesprochen, der zu sein, daß die Gegenstände α_i , von denen Elementaraussagen α handeln, durch die Individuenkonstanten v_i in α nur bezeichnet werden und der Zusammenhang zwischen α_i und v_i in einer solchen Praxis erst praktisch hergestellt werden muß, während die Primaussagen der Protoarithmetik in gewisser Weise von den in ihnen enthaltenen Individuenkonstanten selbst handeln (zur Präzisierung dieser vagen Ausführungen siehe den Unterschied zwischen Repräsentation (S.95) und Abstraktion (S.114)). Ohne diese Unterscheidung näher zu diskutieren, verweisen wir auf die für unsere Zwecke allein wichtige Tatsache, daß z.B. $I < III$ logisch atomar ist und außerlogisch elementar verteidigt wird. Wir behalten deshalb zur terminologischen Vereinfachung den Begriff der Elementaraussage bei.

[2] Die im folgenden erarbeiteten Begriffe der Begründung etc. gelten a fortiori für eine Praxis P_1^* mit materialen 2-Dialogen

[3] Zum Begriff des praktischen Verfahrens siehe S.103.

(II2) Allgemeine Definitionen

Wenn wir in den folgenden allgemeinen Abhandlungen von den bzgl. P^* gewonnenen Begriffen abstrahieren, so sind wir uns im Klaren darüber, daß vor allem zwei diesen Definitionen zentrale Konzeptionen im Vergleich etwa zu den Ausführungen in Teil I stark im Bereich des Intuitiven bleiben: die der (konkret) realisierbaren Praxis und innerhalb dieser die des praktischen Verfahrens; eine Präzisierung der ersteren wird also kaum möglich sein ohne eine der letzteren.

Eine Möglichkeit der Festlegung, die einem formal gebildeten Leser wohl als erste einfällt, wäre die Gleichsetzung des praktischen mit dem rekursiven Verfahren analog der Behandlung des Begriffs der Berechenbarkeit. Diese Definition wäre aber für die Zwecke des DK wohl zu eng ^[1], da wir einen Begriff benötigen, der nicht nur in der Protoarithmetik, sondern auch auf anderen Gebieten, wie dem der Protophysik usw. anwendbar ist.

Wir können deshalb nur Beispiele angeben: praktische Verfahren sollen sein die Nachahmung einer Opp.-Verteidigung durch den Prop., (ev^c) aus P^* , das Verfahren zur Begründung von (P2), das Plattenschleifen in der Protophysik etc.

Die Unsicherheit in dieser zentralen Kategorie überträgt sich dann natürlich auch auf den übergeordneten Begriff der realisierbaren Praxis. Wir können dazu nur sagen: die Konzeption der konkret realisierbaren Praxis ist als explizierender Oberbegriff derjenigen im DK beschriebenen Systeme intendiert, die dort mit der Vorschaltung "Proto-" gekennzeichnet sind,

also etwa der Protoarithmetik, der Protophysik etc. Diese Praxen sollen vor allem normiert sein, d.h. die darin vorkommenden Handlungen und dadurch erzeugten Entitäten sollen regelgeleitet und auf ihre Regularität hin überprüfbar sein. Sie sollten (wenn nicht ausdrücklich anders gesagt) wie P^* ein System der materialen Logik enthalten. Eine Spezialbedingung, die die praktische materiale Korrektheit der formalen Logik sicherstellt, wäre die Einschränkung von Elementarverteidigungen in jeder realisierbaren Praxis auf solche, die von allen Teilnehmern an dieser Praxis imitiert werden können (so sollte es etwa einem Opp. in einem materialen Dialog nicht möglich sein, eine eigene Elementarverpflichtung durch die Demonstration einzulösen, daß er größer als der Dialogpartner ist, was dann vom Prop. nicht nachvollziehbar wäre).

Schließlich benötigen wir den Begriff der Erweiterung von P_1 um P_2 , was für die realisierbaren Praxen P_1 und P_2 eine dritte P_3 bezeichnet, die das Ergebnis der Einführung aller Verfahren aus P_2 in P_1 darstellt zusammen mit den dadurch erzeugten Komponenten (wobei wir u.U. etwa Individuenkonstanten von P_2 umbenennen können, damit sie nicht mit denen von P_1 kollidieren). Ferner sei eine k^* -Praxis eine realisierbare Praxis, die ein System der materialen k^* -Dialoge enthält und die Situation S aus der realisierbaren Praxis P gleich (L, R) für die Sprache L aus P und die Menge R der (α, e) mit e Elementarverteidigung für α aus P analog S^* und L^* aus P^* .

Wir beginnen mit

(Df33) Sei P k^* -Praxis und V praktisches Verfahren aus P .

Dann gelte:

(1) Φ ist k^* -begründet in P durch V

gdw

(a) Φ ist Aussage aus P

(b) nach V ist auf jeden Fall ein praktisch gewonnener materialer k^* -Dialog aus P um Φ erzwingbar.

(2) A ist k^* -begründet* in P durch V

gdw

(a) A ist Menge von Aussagen Φ aus P , die durch ein praktisches Verfahren aus P entscheidbar ist,

(b) jedes $\Phi \in A$ ist k^* -begründet in P durch V

Eine alternative Formulierung für das Definiens von (2) wäre gewesen: Es gibt eine endliche Menge $\{V_1, \dots, V_n\}$ von Verfahren aus P , so daß jedes $\Phi \in A$ durch ein V_i k^* -begründet ist. Dies wäre wohl die natürliche Auffassung etwa der Begründung von (P1)-(P'5) aus P^* . Wir konnten die einfachere Formulierung in (2) wählen, weil sie dazu äquivalent erscheint: Wir können $V_1, \dots, V_i$ immer zu dem Verfahren V zusammenfassen.

Wenn wir nun A als die Menge der Axiome eines Axiomensystems auffassen, so liefert uns (Df33,2) eine Deutung der Begründung dieses Axiomensystems in einer realisierbaren Praxis. Das folgende Lemma ist, ähnlich wie alle weiteren, dadurch etwas problematisch, da es einen formalen Begriff - den der materialen

Wahrheit - mit dem eher intuitiven der Begründung in Verbindung setzt; trotzdem sollte es nach unseren Ausführungen zu diesem Punkt unmittelbar einleuchten:

(L33) Für jede k^* -Praxis gilt:

wenn A aus P k^* -begründet* ist, ist jedes $\phi \in A$ material k^* -wahr bzgl. der Situation S aus P

(Df34) A ist k^* -begründbar* in P_1

gdw

es gibt ein P_2 , so daß für die Erweiterung P_3 von P_1 um P_2 gilt:

- (a) die Situation S_1 aus P_1 ist gleich der Situation S_3 aus P_3
- (b) A ist k^* -begründet* P_3

Die Forderung (a) besagt intuitiv, daß P_2 keine neuen Elementarverteidigungen gegenüber denen von P_1 einführt. Dies wird wichtig in:

(Df35) A ist total k^* -begründbar*

gdw

für jede k^* -Praxis P mit allen $\phi \in A$ als Aussagen aus P ist A k^* -begründbar aus P

(L34) Jede Menge A von formal k^* -wahren Aussagen ist total k^* -begründbar.

(Beweis) Dieses Lemma stellt eine Präzisierung der schon vorher diskutierten praktischen materialen Korrektheit der formalen k^* -Wahrheit dar. Die jeweilige Erweiterung P_3

aus (Df34) einer k^* -Praxis P_1 um P_2 , in der A dann k^* -begründet* ist, ist das praktische Verfahren der formalen k^* -Gewinnstrategien in P_2 und des dadurch erzwingbaren praktischen Dialoggewinns mit Nachahmung der Opp.-Elementarverteidigungen.

Wir definieren die praktische k^* -Kompatibilität von A mit P_1 wie die k^* -Begründbarkeit von A in P_1 (Df34) ohne Bedingung (a). Dann gelte:

(Df36) A ist universal k^* -begründbar*

gdw

A ist k^* -kompatibel mit jeder k^* -Praxis P

Es ist wohl eine korrekte Interpretation der Intentionen des DK, wenn wir behaupten, daß der DK den Wert eines Begründungsmechanismus wie in P^* vor allem darin sieht, daß jede Praxis P_0 um P^* zu einer realisierbaren Praxis P erweitert werden kann, worauf in P zunächst (P1)-(P'5) begründbar ist, um dann in P nach praktischen Anwendungen aus P_0 zu suchen und so die Rechtfertigung der (Proto-?) Arithmetik einzuleiten.

Nachdem wir so die Axiomenmengen A in ein Begründungssystem eingeordnet haben, müssen wir auch den Begriff der formalen Ableitbarkeit eines Φ aus A klären. Dies sollte in einer Weise geschehen, die es uns erlaubt, etwa die Menge der aus (P1)-(P'5) ableitbaren Φ in P^* zu repräsentieren (z.B. durch einen Prädikator **Bew**; diese Möglichkeit wird wichtig in (H3) (S.110) und den darauf folgenden Ausführungen).

Die Ableitbarkeit von ϕ aus einer Axiomenmenge A wird in einem Sequenzenkalkül wie den k^* -Q-Ableitungen sehr einfach definiert. Statt der Ausgangsstellung $\emptyset \Rightarrow \{\phi\}$ ist der Ursprung einer solchen Ableitung gleich $A \Rightarrow \{\phi\}$ (Vgl. analog S.68). Wir nennen ein ϕ aus einem solchen Ursprung k^* -Q-ableitbar aus A . Äquivalent dazu ist offensichtlich der im DK verwendete Mechanismus, alle Aussagen $\psi_i \in A$ am Anfang eines Dialogs als Opp.-züge $\psi_i \parallel$ (und damit für den Proponenten jederzeit angreifbare Opp.-Aussagen) zu setzen. Diese Methode bringt jedoch z.B. für die Repräsentierbarkeit eines solchen Ableitungsbegriffs durch ein

Abl Schwierigkeiten, weil (P'5) unendlich viele Instanzen hat und damit solche Ableitungen nicht mehr unmittelbar in ein praktisches Verfahren bzw. in die durch ein solches Verfahren erzeugten Komponenten einer realisierbaren Praxis übersetzbar sind.

Eine Möglichkeit, um diese praktische Herstellbarkeit zu gewährleisten, wäre eine Zusatzregel, in der auch Aussageschemata als Opp.-Züge möglich sind, die dann sozusagen alle Instanzen repräsentieren. Es wäre jedoch wünschenswert (und ist möglich), einen allgemeinen Begriff zu definieren, der Ableitungen auch in solchen Theorien erfaßt, in denen die Axiome zwar unendlich viele sind, aber nicht unter endlich viele Aussageschemata fallen, sondern durch ein anderes (praktisches) Verfahren gegeben sind.

Unser Vorschlag ist deshalb der : Wir führen einen auf eine Aussagenmenge A von ϕ in L relativierten neuen A-Angriff $\parallel ? \psi_i$

in $\underline{L}$ für $\psi_1 \in A$ ein, der nur dem Proponenten gestattet ist. Die einzige A-Verteidigung in $\underline{L}$ des Opponenten dagegen ist der Zug ψ_1 . Wir definieren einen formalen k*-Dialog über $\underline{L}$ hsl. A (hinsichtlich A) wie den formalen k*-Dialog über $\underline{L}$ mit dem einzigen Unterschied, daß in einen solchen Dialog Aussagen über A-Angriffe und A-Verteidigungen eingeführt werden können. Entsprechend legen wir den Begriff der formalen k*-Gewinnstrategie hsl. A über $\underline{L}$ und der formalen k*-Wahrheit hsl. A über $\underline{L}$ fest. Wir gehen kurz auf das folgende Theorem ein:

(Th9) ϕ ist formal k*-wahr hsl. A über $\underline{L}$ gdw ϕ ist k*-Q-ableitbar aus A über $\underline{L}$

(Beweis) Analog dem von (Th6), (Th7). In qb bzw. qb' wird für den Ursprung $\|\phi$ von $T A \Rightarrow \{\phi\}$ bzw. $A : \phi$ gesetzt und jede Zugfolge

$$\psi_1 \parallel \parallel ? \psi_1$$

in T gestrichen. In strat bzw. strat' wird vor den Anwendung einer Schlußregel auf ein ψ_1 aus A in $\Sigma [\psi_1] \Rightarrow \Theta$ bzw. $\Sigma [\psi_1] : \Delta$ aus der k*-Q-Ableitung B mit Ursprung $A \Rightarrow \{\phi\}$ bzw. $A : \phi$ und der entsprechenden Umwandlung in einen Mikrobaum aus einer Gewinnstrategie die obige Zugfolge eingeschaltet. Man beachte, daß dadurch in den intuitionistischen Ableitungen in den entsprechenden Gewinnstrategien die Proponentenverteidigungen regulär bleiben, da keine neuen angegriffenen Prop.-Aussagen in einem Quasi-ast D vorkommen.

Es läßt sich erwartungsgemäß der folgende Satz zeigen:

(Th10) Sei P k^* -Praxis und A begründet* aus P . Dann gilt für die Situation S aus P :

Wenn ϕ formal k^* -wahr hsl. A über S^1 ist, ist ϕ material k^* -wahr bzgl. S

(Beweis) Es gelte

- (a) $k^*=1$. Wenn ϕ hsl. A formal 1-wahr über S^1 ist, gibt es nach (Th9) eine 1-Q-Ableitung B aus $A \Rightarrow \{\phi\}$. Da nach (L33) alle $\psi \in A$ material 1-wahr bzgl. S sind, sind sie nach (Th5) auch semantisch wahr bzgl. S . Aus semantisch wahren Sätzen 1-Q-ableitbares ϕ ist selbst semantisch wahr aufgrund der Adäquatheit des klassischen Ableitbarkeitsbegriffs und ϕ ist nach (Th5) material 1-wahr bzgl. S .
- (b) $k^*=2$. Wenn ϕ über S^1 hsl. A formal 2-wahr ist, ist es analog (L31) auch formal 1-wahr und nach (a) material 1-wahr, also nach (Th5) auch material 2-wahr bzgl. S .

Hier erhebt sich spontan die Frage, ob in (Th10) "material k^* -wahr bzgl. S " ersetzt werden kann durch " k^* -begründbar aus P " (ϕ sei k^* -begründbar gdw $\{\phi\}$ k^* -begründet* ist). Ein Urteil darüber würde eine eingehende formale Behandlung des Problems erfordern. Es sei offen zugegeben, daß wir diesen Satz hier als offene Hypothese formulieren müssen:

(H3) Wenn A k^* -begründet* aus P und ϕ formal k^* -wahr hsl. A über der Sprache L aus P ist, dann ist ϕ k^* -begründbar aus P .

Es bestehen nun 3 Möglichkeiten: Entweder (H3) ist beweisbar aufgrund unserer Definitionen und der Minimalvoraussetzungen, die wir für eine k^* -Praxis gegeben haben, oder widerlegbar aufgrund dieser Voraussetzungen oder (H3) ist zu verstehen als Anforderung an den Begriff der konkret realisierbaren k^* -Praxis: daß wir nur solche P zulassen wollen, die (H3) erfüllen.

Wenn wir die zweite Möglichkeit ausklammern (was gewisse Überlegungen plausibel erscheinen lassen), so können wir (H3) ansehen als die konstruktivistische *raison d'être* der formalen Ableitungen (der formalen k^* -Gewinnstrategien hsl. A): sind die Elemente eines entscheidbaren A aus einem P einmal in P als k^* -begründet erkannt, eingeführt oder durch Konvention ausgewiesen (vgl. II3b), so ist über die finiten formalen k^* -Gewinnstrategien hsl. A eine größere oder kleinere Klasse (je nach A) von k^* -begründbaren Aussagen über die formal k^* -wahren hinaus repräsentierbar in P.

Wir haben uns nun extensiv mit der Begründung von (P1)-(P'5) in der 2-Praxis der Protoarithmetik P^* beschäftigt. Wie steht es nun mit der Begründung der Arithmetik selbst (oder der Peano-Axiome in ihr)? Präziser formuliert: Welche Relevanz hat der Mechanismus der Begründung in P^* für das menthetheoretische Prädikat "...ist eine Teilarithmetik", für das P^* Modell ist (d.h. in dem P^* Element ist)? Zur Behandlung dieser Frage führen wir zunächst die folgenden formalen Begriffe ein: [2]

Sei y ein $\underline{m_1, \dots, m_n, j_1, \dots, j_k}$ -Modell gdw $y = (U, R_1, \dots, R_n, o_1, \dots, o_k)$, $j_i = 0$, $o_i \in U$ und R_i ist m_i -stelliges Prädikat auf U . Sei H eine $\underline{m_1, \dots, m_n, j_1, \dots, j_k}$ -Matrix gdw H ist eine Menge von $m_1, \dots, m_n, j_1, \dots, j_k$ -Modellen. Sei A eine Menge von Aussagen ϕ einer Sprache L , $\underline{az(A)}$ eine Standardabzählung der $\phi \in A$, $\underline{id(A)}$ die Folge der Individuenkonstanten von L aus A in der Reihenfolge ihres Auftretens in $\underline{az(A)}$ und $\underline{pr(A)}$ die entsprechende Folge von Prädikatkonstanten. Dann gelte:

y entspricht A gdw y ist $m_1, \dots, m_n, j_1, \dots, j_k$ -Modell, A ist Aussagenmenge mit dem k -tupel $\underline{id(A)}$ und dem n -tupel $\underline{pr(A)}$, wobei $\underline{pr(A)}$ i m_i -stellige Prädikatkonstante ist. Bekanntlich läßt sich nun eine Relation Erf zwischen Modellen y und $\phi \in A$ für A entsprechendem y definieren^[3] (y erfüllt ϕ), für die folgender meta-meta-sprachliche Satz bewiesen werden kann:

Sei ${}^+\phi^+$ der metasprachliche Name für eine objektsprachliche Aussage (z.B. ' $\wedge n \neg (n < 1)$ '). Sei m eine Funktion, die solchen ${}^+\phi^+$ in geeigneter Weise die entsprechenden metasprachlichen Ausdrücke zuordnet, wobei alle Quantoren auf eine Variable $\check{n}$ beschränkt werden (so könnte für ${}^+\phi^+$ wie oben $m({}^+\phi^+)$ etwa gleich ' $\forall n \in U \sim ((n, e) \in K)$ ', (also $\check{n}$ gleich ' U ') gelten).

Dann ist metasprachlich der folgende Satz beweisbar:

'Wenn ${}^+\phi^+ \in A$ für die Aussagenmenge A und $\mathcal{M} \models A$ entspricht, dann gilt:

$$\mathcal{M} \models \text{Erf } {}^+\phi^+ \text{ gdw } m({}^+\phi^+)$$

für $\mathcal{M} = \langle \check{U}, \check{R}_1, \dots, \check{R}_n, \check{o}_1, \dots, \check{o}_k \rangle$, wobei $\check{R}_i, \check{o}_i \in m({}^+\phi^+)$ entspricht.

So ist z.B. für ${}^+\phi^+$, $m({}^+\phi^+)$ wie oben, $\mathcal{A}$ gleich $\{{}^+\phi^+\}$ metasprachlich beweisbar:

Wenn $(U,K,e) \models \{\bigwedge n \neg(n<1)\}$ entspricht (d.h. (U,K,e) ist 2,0-Modell), dann gilt:

$$(U,K,e) \models \bigwedge n \neg(n<1) \text{ gdw } \forall n \in U \sim ((n,e) \in K)$$

Sei nun H das A-Prädikat gdw A ist Aussagenmenge und H enthält genau die Modelle y , die A entsprechen und für die gilt: $y \models \phi$ für jedes $\phi \in A$ (jedes A-Prädikat ist also $m_1, \dots, m_n, j_1, \dots, j_k$ -Matrix).

Dann definieren wir für die Menge A^* aus (P1)-(P4) und allen Instanzen von (P'5):

H^* ist Teilarithmetik gdw H^* ist das A^* -Prädikat.

$\text{id}(A^*)$ ist gleich (I) , $\text{pr}(A^*)$ gleich $(S, <)$, H^* ist also 2,2,0-Matrix. Nach Definition gilt:

$$H^* = \left\{ (U,S,K,e) : \begin{array}{l} (U,S,K,e) \text{ ist } 2,2,0\text{-Modell} \ \& \\ \& (U,S,K,e) \models \bigwedge n \neg(n<1) \ \& \\ \& \vdots \end{array} \right\}$$

Ferner gilt aufgrund der Eigenschaften von $\models$:

$$H^* = \left\{ (U,S,K,e) : \begin{array}{l} (U,S,K,e) \text{ ist } 2,2,0\text{-Modell} \ \& \\ \& \forall n \in U \sim ((n,e) \in K) \ \& \\ \& \vdots \end{array} \right\}$$

In welchem Verhältnis steht nun P^* zu H^* ? Es lassen sich zwei Zusammenhänge aufweisen:

(I) H^* ist das A^* -Prädikat und A^* ist begründet* aus P^*

(II) Sei U^* die Menge der Individuenkonstanten aus P^* , S^* die Menge derjenigen (v_1, v_2) , so daß $v_1 \mathcal{S} v_2$, K^* die Menge derjenigen (v_1, v_2) , so daß $v_1 \mathcal{L} v_2$ elementar verteidigbar ist aus P^* . Dann ist $(U^*, S^*, K^*, I) \in H^*$.

Wenn sich aus der Begründung von (P1)-(P'5) aus P^* überhaupt eine konstruktive Untermauerung von H^* ableiten läßt, dann nur über (I) oder (II). Wir verallgemeinern zunächst (I):

(Df37) H ist stark k^* -fundiert

gdw

es gibt eine k^* -Praxis P und eine Menge A von Aussagen aus P , für die gilt:

- (a) A ist k^* -begründet aus P
- (b) H ist das A -Prädikat

Um (II) zu verallgemeinern, benötigen wir zunächst den folgenden Begriff: R abstrahiert Π aus P gdw P ist k^* -Praxis, R ist n -stellige Relation auf den Individuenkonstanten aus P , Π ist n -stellige Prädikatkonstante aus P und $(v_1, \dots, v_n) \in R$ gdw gdw die Elementaraussage $\alpha[\Pi, v_1, \dots, v_n]$ ist aus P elementar verteidigbar. Dann gelte:

(Df38) y ist das Modell aus P hsl. A

gdw

- (a) A ist Menge von Aussagen aus der k^* -Praxis P
- (b) $y = (U, R_1, \dots, R_n, o_1, \dots, o_k)$ entspricht A und
- (ba) U ist die Menge der Individuenkonstanten aus P
- (bb) für $\Pi = \text{pr}(A)$ ϵ_i abstrahiert R_i Π aus P
- (bc) für $v = \text{id}(A)$ ϵ_i ist $o_i = v$

(Df39) H ist schwach fundiert

gdw

für eine k^* -Praxis P und eine Menge A von Aussagen
aus P gilt:

(a) H ist das A-Prädikat

(b) $\forall x H$ für das Modell y aus P hsl. A

(In (Df38) und (Df39) erscheint ' k^* ' nicht im Definiens, da für das Modell und die schwache Fundierung nur die für 1- und 2-Praxen übereinstimmenden Elementarverteidigungen aus P relevant sind).

Das Prädikat Erf läßt sich so präzisieren (siehe Anm.[3]), daß über (L33) der folgende Satz beweisbar wird:

(Th11) Wenn H stark k^* -fundiert ist, ist H schwach fundiert.

Die Umkehrung von (Th11) gilt sicher nicht, da ja dann beliebige Aussagemengen A aus einer k^* -Praxis P begründbar* wären aufgrund (Df37) und der unbeschränkten Bildbarkeit von A-Prädikaten. Angesichts solcher Überlegungen erscheint die schwache Fundierung wohl als eine den Zielen des DK nicht genügende Einschränkung der A-Prädikate. Wir werden also auf die starke Fundierung zurückverwiesen, wenn wir uns mit dem Problem der Interpretation der Intentionen des DK im Hinblick auf Theorien im modernen Sinne des mengentheoretischen Prädikats befassen. Hierbei ergibt sich:

Die konstruktive starke Fundierung eines mengentheoretischen Prädikates H besteht im Wesentlichen aus einer mühsamen Reduktion

dieses Begriffs auf den der k^* -Begründung* einer Axiomenmenge A aus einer k^* -Praxis P . Mit dieser sozusagen linguistischen Fixierung auf die Gestalt der $\phi_1, \dots, \phi_n, \dots \in A$ und die (sprachlichen) materialen Dialoge im Mechanismus der Begründung* von A ist eine unmittelbare Befruchtung durch den Ansatz des DK der mehr modelltheoretisch orientierten Betrachtungsweise von Theorien durch die moderne analytische Forschung (etwa durch Suppes oder Sneed und Stegmüller) eher unwahrscheinlich.

Man könnte sich allenfalls einen ehrgeizigen Versuch vorstellen, zumindest für eine Teilklasse der k^* -Praxen (in der z.B. die praktischen Verfahren als rekursive rekonstruierbar wären), eine allgemeine Definition "H ist rekursiv fundiert" zu erarbeiten, die auf gewisse Strukturmerkmale der Modelle von H Bezug nähme, ohne auf irgendwelche aus einem P begründbaren Axiome zu rekurrieren. Die Verbindung zu unserem Begriff der starken Fundierung müßte dann so herstellbar sein, daß für jedes Modell mit diesen Strukturmerkmalen eine Praxis P herstellbar wäre, woraus dieses Modell stammt, so daß für eine bestimmte Aussagenmenge A ihre Begründbarkeit* aus P und die Identität von H mit dem A -Prädikat beweisbar wäre.

[1] Siehe dazu (wenn auch in einem etwas anderen Zusammenhang) P.Lorenzen, Ein dialogisches Konstruktivitätskriterium, in: [Lorenzen/Lorenz], S.9.

[2] Vor allem in Hinsicht auf das im wesentlichen negative Ergebnis unserer Untersuchung (siehe S.116) verkürzen wir die sonst sehr umständlichen folgenden Definitionen (so sollte etwa korrekterweise dabei immer Bezug genommen werden auf eine Sprache L).

[3] für eine systematische Behandlung siehe etwa: G.Mayer, Mengentheoretische Modelltheorie, Magisterarbeit, München 1977.

A N H A N G = = = = =

In diesem Anhang werden wir einen Nachtrag zu folgenden Problemen vornehmen:

- (1) Die Definition und Einordnung des Begriffs der halbformalen Wahrheit
- (2) Die Definition einer adäquaten intuitionistischen Semantik im Rahmen unseres Ansatzes.

Der erste Punkt läßt sich rasch erledigen:

(Df40) T ist halbformale k^* -Gewinnstrategie in L für ϕ

gdw

(a) T ist k^* -Strategie in L für ϕ

(b) jeder Quasiast von T ist formal gewonnen über L

Da die Quasiäste einer k^* -Strategie k^* -Dialoge in L sind, legt (b) jeden Quasiast von T als einen k^* -Dialog ohne Parameter fest, der eine Opp.-Verpflichtung $\alpha!$ vor einer Prop.-Verpflichtung $\|\alpha!$ enthält.

(Df41) ϕ ist halbformal k^* -wahr in L

gdw

es gibt eine halbformale k^* -Gewinnstrategie in L für ϕ

(Df42) B ist halbformale k^*Q -Ableitung in L für

gdw

(a) B ist k^*Q -Baum in L für ϕ

(b) für jeden Endpunkt $\star \sum \rightarrow \emptyset$ von B ist eine Elementaraussage α von L in $\sum \cap \emptyset$ enthalten.

(Df43) Φ ist halbformal k^* -wahr in L

gdw

es gibt eine halbformale k^* -Q-Ableitung in L für Φ

(Th12) Φ ist halbformal k^* -wahr in L

gdw

Φ ist halbformal k^* -Q-wahr in L

(Beweis) Analog (Th6), (Th7) ohne das Problem der Parameter.

Da die halbformale k^* -Q-Wahrheit äquivalent ist zu den üblichen Definitionen der halbformalen Wahrheit, übertragen sich alle diesbezüglichen Eigenschaften auf die halbformale k^* -Wahrheit.

Wir gehen nun (2) an. Ausgangspunkt ist für uns das in (L32) angesprochene Problem, daß der formale intuitionistische Dialogkalkül hinsichtlich des Begriffs der materialen 2-Wahrheit zwar die Forderung der Korrektheit, aber nicht die der Vollständigkeit erfüllt, und zwar bereits in der Junktorenlogik nicht, so daß sich dieses Ergebnis auch auf die halbformale 2-Wahrheit überträgt (die ja nach unserer Definition für junktorenlogische Φ mit der formalen 2-Wahrheit übereinstimmt).

Wir schlagen im folgenden einen Begriff der Entfaltung vor, auf dem dann ein neuer Begriff der materialen k^* -Wahrheit' so aufbaut, daß zunächst für die halbformale Wahrheit der folgende Satz beweisbar wird:

(Th0') Φ ist halbformal k^* -wahr

gdw

Φ ist material k^* -wahr' bzgl. jeder k^* -Entfaltung g

(Hier und in unseren weiteren Ausführungen setzen wir den Rahmen einer bestimmten Sprache L voraus.)

(Df1') g ist k^* -Entfaltung

gdw

g ist Funktion von der Menge der k^* -Dialoge in die Potenzmenge der Elementaraussagen α , wobei für jeden Dialog D_1, D_2 gilt:

wenn D_1 Anfangsstück von D_2 ist, dann ist $g'D_1 \subseteq g'D_2$

Hierbei können wir $g'D$ intuitiv auffassen als die Menge derjenigen Elementaraussagen α , für die beim Abschluß von D eine Elementarverteidigung zur Verfügung steht (in diesem Zusammenhang unterschlagen wir die Elementarverteidigungen selbst). Dann können wir eine Entfaltung intuitiv folgendermaßen erläutern:

Wir sehen auch die leere Folge $\emptyset$ als einen Dialog (den leeren Dialog) an, die dann Anfangsstück eines jeden Dialogs ist. $g'\emptyset$ ist dann die Menge der elementar verteidigbaren α , die z.B. vor der Aufnahme eines Dialogs den Dialogpartnern zur Verfügung stehen. $g'D$ ($D \neq \emptyset$) gibt dann sozusagen an, wie die Kenntnis um Elementarverteidigungen bis zum Abschluß des Dialogs D gewachsen ist. Bei jeder Fortsetzung D' von D bleibt diese Kenntnis erhalten und wird u.U. erweitert.

Daß diese Erweiterung von der jeweiligen Form des Dialogs abhängig ist, ließe sich intuitiv vielleicht etwas mühsam so begründen, daß z.B. der Opponent durch das Auftauchen einer eigenen Verpflichtung α in einem Dialog erst angeregt wird,

eine Elementarverteidigung für α zu finden. (Formal notwendig ist diese Regelung für den Beweis von (Th0'), wie wir zum Schluß näher zeigen werden.)

(Df2') D ist gewonnen' bzgl. g

gdw

D ist k*-Dialog, g ist k*-Entfaltung und entweder

$$(a) D = D_0 \circ (\alpha! \parallel) \circ D' \text{ und } \alpha \notin g'D_0 \circ (\alpha! \parallel)$$

oder

$$(b) D = D_0 \circ (\parallel \alpha!) \text{ und } \alpha \in g'D$$

(Df3') ϕ ist material k*-wahr' bzgl. g

gdw

es gibt eine k*-Strategie für ϕ , deren Quasiäste bzgl. g gewonnen' sind

(Th1') Wenn ϕ halbformal k*-wahr ist, dann ist ϕ material k*-wahr' bzgl. aller k*-Entfaltungen g

(Beweis) Sei ϕ halbformal k*-wahr, dann gibt es eine halbformale k*-Gewinnstrategie G für ϕ , die in jedem Quasiast ein $\parallel \alpha!$ nach $\alpha! \parallel$ hat. Jeder Quasiast $D = D_0 \circ (\alpha! \parallel) \circ D' \circ (\parallel \alpha!)$ ist gewonnen' bzgl. g, da aufgrund $g'D_0 \circ (\alpha! \parallel) \in g'D$ entweder $\alpha \notin g'D_0 \circ (\alpha! \parallel)$ oder $\alpha \in g'D$ ist und G erfüllt das Definiens von (Df3').

(Th2') Wenn ϕ material k^* -wahr' ist bzgl. aller k^* -Entfaltungen g , dann ist ϕ halbformal k^* -wahr

(Beweis) Sei ϕ material k^* -wahr' bzgl. allen g , aber es existiere keine halbformale k^* -Gewinnstrategie für ϕ . Dann hat jede k^* -Strategie G für ϕ mindestens einen Quasiast D^* ohne ein $\alpha!||$ vor $||\alpha!$, da andernfalls G halbformale k^* -Gewinnstrategie wäre. Sei g_0 definiert durch $g_0'D = \{\alpha: \alpha!|| \text{ ist Zug in } D\}$. Dann ist in jeder k^* -Strategie das betreffende D^* nicht gewonnen' bzgl. g_0 (in Gegensatz zur Annahme und (Df3')), da für alle $\alpha!||$ in D^* für $D^* = D_0^*(\alpha!||) \circ D_1^*$ $\alpha \in g'D_0^*(\alpha!||)$ gilt, aber für kein $||\alpha!$ mit $D^* = D_0^*(||\alpha!)$ $\alpha \in g'D^*$.

(Th0') folgt unmittelbar aus (Th1') und (Th2').

Zu diesem Ergebnis ist anzumerken:

(A) Für $\text{wertbereich}(g) = \{x\}$ ergibt sich eine herkömmliche atomare Bewertungssemantik b , die ein elementares α als wahr bewertet gdw $\alpha \in x$. Damit wäre ϕ 1-wahr' bzgl. g gdw ϕ 2-wahr' ist bzgl. g ((vgl. C.(I4)),

(B) Für $g'D_1 = g'D_2$ für alle gleich langen D_1 und D_2 kommt ein ähnliches Ergebnis zustande. Man könnte ein solches g auffassen als ein Abbild einer "objektiven" Entwicklung, darstellbar als eine Folge $s = (x_0, x_1, \dots)$ mit $g'D = x_n$ für jedes n -tupel D , wobei x_n sozusagen das allgemeine Wissen um die möglichen Elementarverteidigungen zum Zeitpunkt t_n repräsentiert.

Wenn wir jedoch den Begriff der Entfaltung so vereinfachen, wird z.B. das intuitionistisch halbformal nicht beweisbare

$\neg\alpha \vee \neg\neg\alpha$ material 2-wahr' bzgl. jedem g. Denn entweder ist α in keinem x_i wie oben enthalten, dann ist

1		$\neg\alpha \vee \neg\neg\alpha$	
2	?		(1)
3		$\neg\alpha$	(1,2)
4	α		(3)
5		?	(4)
6	α	!	(4,5)

2-Strategie mit bzgl. g gewonnenem Quasiast oder für $\alpha \in x_j$ für ein x_j

1		$\neg\alpha \vee \neg\neg\alpha$	
2	?		(1)
3		$\neg\neg\alpha$	(1,2)
4	$\neg\alpha$		(3)
5		α	(4)
6	?		(5)
7		α	(4)
8	?		(7)
		:	
n		α !	(n-2, n-1)

mit j Angriffen α auf 4.

Um die Bedeutung von (Th0') für die formale Logik herauszuarbeiten, geben wir einige Beweise zum Verhältnis zwischen formaler und halbformaler k^* -Q-Wahrheit an. Dabei untersuchen wir nur die klassische Logik, die Beweise lassen sich ohne weiteres auf den intuitionistischen Fall übertragen.

Zunächst läßt sich an einigen einfachen Überlegungen demonstrieren, daß für Sprachen L mit endlich vielen Individuenkon-

stanten die halbformale k^* -Q-Wahrheit nicht mit der formalen zusammenfällt. Sei z.B. L_0 eine Sprache mit den 2 Individuenkonstanten v_1 und v_2 , π eine Prädikatkonstante und πv_j Elementaraussage in L_0 ; sei ferner $\psi_0 = \pi v_1 \wedge \pi v_2$, $\Delta_0 = \bigwedge x \pi x$ und $\phi_0 = \psi_0 \rightarrow \Delta_0$. Dann ist ϕ_0 halbformal 1-Q-wahr in L_0 aufgrund folgender halbformaler 1-Q-Ableitung:

$$\begin{array}{ll}
 \emptyset \Rightarrow \{\phi_0\} & (\Rightarrow\Rightarrow) \\
 \{\psi_0\} \Rightarrow \{\phi_0, \Delta_0\} & (\wedge\Rightarrow) \\
 \{\pi v_1, \pi v_2, \psi_0\} \Rightarrow \{\phi_0, \Delta_0\} & (\Rightarrow\wedge) \\
 \hline
 \{\pi v_1, \pi v_2, \psi_0\} \Rightarrow \{\phi_0, \Delta_0, \pi v_1\} & \{\pi v_1, \pi v_2, \psi_0\} \Rightarrow \{\phi_0, \Delta_0, \pi v_2\}
 \end{array}$$

ϕ_0 ist jedoch ohne z.B. die Voraussetzung $\bigwedge x (x = v_1 \vee x = v_2)$ offensichtlich nicht formal 1-Q-wahr in L_0 .

Für die folgenden Beweise nehmen wir also immer Bezug auf den Hintergrund einer Sprache L^+ mit unendlich vielen Individuenkonstanten.

(Th3') Wenn ϕ formal 1-Q-wahr ist, ist ϕ halbformal 1-Q-wahr.

(Beweis) Sei ϕ formal 1-Q-wahr, dann läßt sich aus der 1-Q-Ableitung B für ϕ eine halbformale 1-Q-Ableitung B' für ϕ herstellen, indem man für jeden Punkt $x = \star \Sigma \Rightarrow \bigodot [\bigwedge \{ \psi \}]$ mit nach $(\Rightarrow\wedge)$ abgeleitetem Nf $Y = \star \Sigma \Rightarrow \bigodot, \psi [\varrho / \{ \}]$ und dem Teilbaum A ab Y den Nf-Sequenten (Y) von X ersetzt durch den Nf-Sequenten $(\dots, Y_j, \dots)$ mit $Y_j = \star \Sigma \Rightarrow \bigodot, \psi [\underline{+} 'j / \{ \}]$ und an jedes dieser Y_m den Teilbaum A $[\nu_m / \varrho]$ anhängt (entsprechend verfährt man für nach $(V\Rightarrow)$ abgeleitetes Y).

Für das nächste Lemma benötigen wir den folgenden Begriff:

Sei w Weg einer 1-Q-Ableitung. Dann ist $t = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ Ableitungskette aus w gdw für jedes ψ_m, ψ_{m+1} aus t ein $x_{k+1} = \star \sum_{k+1} \Rightarrow \odot_{k+1}$ aus w aus $x_k = \star \sum_k \Rightarrow \odot_k$ mit $\sum_k = \sum_{k+1} \setminus \{\psi_{m+1}\}$ oder $\odot_k = \odot_{k+1} \setminus \{\psi_{m+1}\}$ abgeleitet wurde durch Anwendung einer Regel ($\Rightarrow$) auf ψ_m in x_k . Dann stammt ψ_n in $\star \sum \Rightarrow \odot$ aus ψ_1 gdw es gibt eine Ableitungskette $(\psi_1, \dots, \psi_n)$ aus dem Weg w bis $\star \sum \Rightarrow \odot$.

Es sei ferner ein Baum, der sich von einer 1-Q-Ableitung nur dadurch unterscheidet, daß sein Ursprung ein $\star \sum \Rightarrow \odot$ (mit den endlichen Mengen $\sum, \odot$ von Aussagen über L^+) ist, eine 1-Q-Ableitung aus $\sum \Rightarrow \odot$.

(L1') Sei x_1 gleich $\sum \Rightarrow \odot$ (d.h. gleich $(\sum, \odot)$) mit einem $\Delta[v_1] \in x_1$. Unterscheide sich x_{j+1} von x_1 genau dadurch, daß es in x_{j+1} statt Δ $\Delta[v_{j+1}/v_1]$ enthält sowie x' , daß es statt Δ $\Delta[v_2/v_1]$ enthält für $g \in \text{PAR}$, g nicht in $\sum \cup \odot$. Dann gilt:

Wenn es für jedes x_j eine 1-Q-Ableitung B_j aus x_j gibt, gibt es auch eine 1-Q-Ableitung B' aus x' .

(Beweis) Es gelte das Antezedens des Lemmas, dann gilt für das endliche $\sum \cup \odot$, daß nur eine endliche Menge M von Individuenkonstanten darin vorkommen kann, also mindestens ein v_k in L^+ nicht darin vorkommt. In B_k kommen dann in allen Endpunkten $\star \sum_0[\alpha] \Rightarrow \odot_0[\alpha]$ entweder α ohne v_k vor oder in $\star \sum_0 \Rightarrow \odot_0$ aus $\Delta[v_k/v_1]$ stammende α vor und durch das durchgehende Ersetzen von v_k durch ρ wie oben in B_k erhalten wir B' .

(L2') Wenn es eine halbformale 1-Q-Ableitung B aus $\Sigma \Rightarrow \odot$ gibt,
gibt es eine 1-Q-Ableitung B' aus $\Sigma \Rightarrow \odot$.

(Beweis) Durch Induktion nach dem Grad der Aussagen in $\Sigma \cup \odot$
aus (L1').

(Th4') Wenn ϕ halbformal 1-Q-wahr ist, ist ϕ formal 1-Q-wahr.

(Beweis) Unmittelbar aus (L2') durch $\emptyset \Rightarrow \{\phi\}$ für $\Sigma \Rightarrow \odot$.

B I B L I O G R A P H I E

= = = = =

(Die in den Fußnoten mit vollständiger Quellenangabe zitierten Werke beziehen sich nur auf die betreffenden Einzelprobleme und werden hier nicht noch einmal aufgeführt.)

Die philosophischen Wurzeln des DK sind wohl vor allem in den Werken Hugo Dinglers zu suchen; für unsere Probleme relevant sind davon:

DINGLER, Hugo	Philosophie der Logik und Arithmetik, Reinhardt, München 1931
	Der Zusammenbruch der Wissenschaft, Reinhardt, München 1931
	Die Ergreifung des Wirklichen, Eidos, München 1955

teilweise neu herausgegeben in:

Die Ergreifung des Wirklichen, Kapitel I-IV,
Suhrkamp, Frankfurt am Main 1969

Das vielleicht am wenigsten unangreifbare, dafür aber allgemeinste und interessanteste Werk des DK dürfte sein:

	[Lorenzen/Schwemmer]
LORENZEN, Paul/ SCHWEMMER, Oswald	Konstruktive Logik, Ethik und Wissenschaftstheorie, 2.verb. Aufl., Bibliographisches Institut, Mannheim 1973

Die umfangreichste Sammlung von Aufsätzen zur Logik ist:

	[Lorenzen/Lorenz]
LORENZEN, Paul/ LORENZ, Kuno	Dialogische Logik, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1978

Ferner wurden verwendet:

- GETHMANN, Carl F. Theorie des wissenschaftlichen Argumentierens,
Suhrkamp, Frankfurt am Main 1980
- JANICH, Peter Die Protophysik der Zeit, Bibliographisches
Institut, Mannheim 1969
- KAMBARTEL, Friedrich Praktische Philosophie und konstruktive
Wissenschaftstheorie, Suhrkamp, Frankfurt
am Main 1974

Theorie und Begründung, Suhrkamp, Frankfurt
am Main 1976
- KAMBARTEL, Friedrich/
MITTELSTRASS, Jürgen Zum normativen Fundament der Wissenschaft,
Athenäum, Frankfurt am Main 1973
- KAMLAH, Wilhelm/
LORENZEN, Paul Logische Propädeutik, Bibliographisches
Institut, Mannheim 1967
- LORENZ, Kuno [Lorenz]
Dialogspiele als semantische Grundlage von
Logikkalkülen, in: Archiv für mathematische
Logik und Grundlagenforschung, Bd.11

Elemente der Sprachkritik, Suhrkamp, Frank-
furt am Main 1970

Konstruktionen versus Positionen, de Gruyter,
Berlin 1978
- LORENZ, Kuno/
MITTELSTRASS, Jürgen Die Hintergebarkeit der Sprache, in:
Kantstudien Bd.58
- LORENZEN, Paul Einführung in die operative Logik und
Mathematik, Berlin 1955

Formale Logik, de Gruyter, Berlin 1958

Die Entstehung der exakten Wissenschaften,
Springer, Berlin 1960

Metamathematik, Bibliographisches Institut,
Mannheim 1962

Methodisches Denken, Suhrkamp, Frankfurt am
Main 1968

Formale Logik, de Gruyter, Berlin 1970

Allgemeine Untersuchungen von Dialogkalkülen werden von
Walther Kindt durchgeführt, zuletzt in:

KINDT, Walther

Theorie der Dialogspiele, der Einführung
des Wahrheitsprädikats und die Logik von
Sprachen mit unfundierten Sätzen (Publi-
kationsmanuskript), erscheint in: W. Kindt/
T. Ballmer, Sprache und Logik, Ergebnisse
einer interdisziplinären Diskussion, Buske,
Hamburg

LEBENSCLAUF

Am 8.8.1951 wurde ich, Gregor Mayer, als Sohn von Christian Mayer und seiner Frau Marijane Mayer in München geboren. Ich besuchte in München die Weilerschule und das humanistische Wilhelmsgymnasium, wo ich im Sommer 1970 das Abitur bestand.

Nach Beendigung meines Zivildienstes begann ich im WS 1972/73 an der Ludwigs-Maximilians-Universität in München das Hauptfachstudium der Logik und Wissenschaftstheorie mit den Nebenfächern Philosophie sowie Anthropologie und Humangenetik. Mit dieser Fächerkombination legte ich im SS1977 die Prüfung zum M.A. mit Auszeichnung ab.

U.a. besuchte ich Veranstaltungen von Prof.Dr.Dr. Stegmüller, Univ.DoZ.Dr. Hinst, Prof.Dr.Käsbauer, Prof.Dr. v. Savigny und Prof.Dr.Röd (Logik/Wissenschaftstheorie und Philosophie) sowie Prof.Dr.Dr.Ziegelmayr und Dr. Fthenakis (Anthropologie und Humangenetik).

Die Dissertation im Hauptfach Logik und Wissenschaftstheorie ist unter der Leitung von Univ.DoZ.Dr. Peter Hinst entstanden; als Prüfer im Rigorosum haben sich zur Verfügung gestellt Univ.DoZ.Dr. Hinst im Hauptfach, Prof. Dr. Käsbauer im Nebenfach Philosophie und Prof.Dr.Dr. Ziegelmayr im Nebenfach Anthropologie und Humangenetik.

